



CIRCONSCRIPTION SCOLAIRE
ANTANANARIVO ATSIMONDRAVO

C

BACCALAURÉAT BLANC DE L'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

SESSION 2024

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Série : SCIENTIFIQUE

Durée : 04h

Option : C

Coefficient : 05

EXERCICES (4 points)

I- Arithmétique

- 1- Montrer que pour tout entier naturel n , $2^{3n+1} + 3^{6n} + 11^{3n+1}$ est divisible par 7.
En utilisant les congruences. (0,75 pt)
- 2- On considère l'équation à deux inconnues $(x;y)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ suivant: $11x - 7y = 1$ (E).
 - a) Vérifier que $(2;3)$ est une solution de (E). (0,25 pt).
 - b) Résoudre l'équation (E). (0,5 pt)
- 3- Un entier naturel N est tel que :
 - dans la base 10, N s'écrit $N = b+6$;
 - dans le système binaire, N s'écrit $N = (\overline{1a1})_2$. Trouver une relation liant a et b . (0,5 pt)

II-Probabilité

Une roulette truquée comporte quatre secteurs différents numérotés 1, 2, 3, et 4. Quand on lance la roulette, c'est-à-dire lorsqu'on la fait tourner, un index fixe pointe sur l'un des quatre à l'arrêt. Après un lancement, on note P_k la probabilité pour que l'index pointe le secteur numéroté k où $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. On admet qu'il existe un réel α strictement positif tel que $P_k = k \cdot \alpha$

- 1- Un joueur lance la roulette une fois.
 - a) Déterminer le réel α . En déduire les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4 . (0,5+0,5pt)
 - b) Soit l'événement A : L'index pointe sur un secteur portant un numéro impair. Démontrer que la probabilité de l'événement A est $\frac{2}{5}$. (0,25 pt)
- 2- Soit n un entier naturel non nul.

Un autre joueur lance la roulette n fois de suite et d'une manière indépendante. Soit q_n la probabilité de l'événement : « l'index point au moins une fois sur un secteur portant un numéro pair »

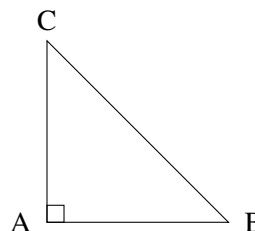
Calculer q_n en fonction de n . (0,75 pt)

PROBLÈMES

Problème 1 (7 points)

Dans un plan orienté P , on considère le triangle direct ABC isocèle et rectangle en A (voir figure). On note par :

- I le milieu du segment $[AB]$;
- r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- t la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$;
- $g = t \circ r_B$ et $f = r_C \circ g$.



Partie A : (Méthode complexe)

P étant muni du repère orthonormé $R(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

- 1- Déterminer z_A, z_B, z_C et z_I affixes respectives des points A, B, C et I . (0,25x4 pt)
- 2- Donner l'expression complexe de f . (1 pt)
- 3- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f . (0,25+0,75 pt)

Partie B : (Méthode géométrique)

- 1- Caractériser g en décomposant t et r_B en deux symétries orthogonales. (1 pt)
- 2- Caractériser f en décomposant r_C et g en deux symétries orthogonales. (1 pt)
- 3- Soit S une similitude plane indirecte de centre A et qui transforme B en I.
 - a) Déterminer le rapport de S. (0,75 pt)
 - b) Soit (C) le cercle de centre A et passant par B, la demi-droite [AI], d'origine A et contenant I, coupe (C) au point B'. Placer le point B'. (0,75 pt)

Problème 2 (9points)

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x-1)\ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ e^{\frac{x}{2}} - x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

Partie A :

- 1- Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0=0$. (0,25+0,75 pt)
- 2-
 - a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,25+0,25 pt)
 - b) Étudier les variations de f. (1 pt)
 - c) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in [2,3]$. (0,25 pt)
- 3- Tracer (C). (on précisera les branches infinies et les demi-tangentes à l'origine) (1,25 pts)

Partie B :

On se propose de trouver une valeur approchée de la solution α de l'équation $f(x)=0$ de la partie A.

On considère une fonction g définie sur $] -1 ; +\infty[$ par : $g(x) = 2\ln(x+1)$

- 1- Etudier les variations de g. (0,5 pt)
- 2- Démontrer que α est une solution de l'équation : $g(x) = x$. (0,5 pt)
- 3- Démontrer que $x \in [2 ; +\infty[$, $g(x) \in [2 ; +\infty[$. (0,25 pt)
- 4- On définit une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$
 - a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$. (0,5 pt)
 - b) Prouver que pour tout $x \in [2 ; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$. (0,25pt)
 - c) Démontrer, en utilisant les inégalités des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n$. (0,75 pt)
 - d) Démontrer que la suite (U_n) converge vers α . (0,25pt)

Partie C :

On considère l'équation différentielle (E) : $y + y' = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- 1- Montrer que la fonction f telle que $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ est une solution de (E). (0,75 pt)
- 2- Résoudre l'équation différentielle (E') : $y + y' = 0$. (0,5 pt)
- 3- Soit ϕ une solution de (E).
Montrer que ϕ est une solution de (E) si et seulement si $\phi - f$ est une solution de (E'). (0,5 pt)
- 4- En déduire les solutions de (E). (0,25 pt)
