

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°1

Exercice 1 (4 points)

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1+\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x^2-1}}$

- 1) Déterminer son ensemble de définition D. (0,75pt)
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$ où y est un paramètre. (1 pt)
- 3) L'application $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ? (0,25pt x 2)
- 4) a) Déterminer deux parties E et F de $\mathbb{R}$, les plus grandes possibles, pour que l'application $g: E \rightarrow F$ soit bijective. (1 pt)
 $x \mapsto f(x)$
b) Définir alors g^{-1} . (0,75pt)

Exercice 2 (12, 5 points)

Partie A (4, points)

- 1) On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}; x^3 + mx^2 + mx + 1 = 0$ où m est un paramètre réel.
 - a) Trouver une solution de (E). (0,25pt)
 - b) Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solutions de (E). (1,5pt)
 - c) Résoudre (E). (0,75pt)
- 2) Soit g_m le polynôme défini par $g_m(x) = x^2 + (m+3)x - m$
 - a) Situer -3 par rapport aux éventuels zéros de g_m . (0,75pt)
 - b) Résoudre l'inéquation $x \in \mathbb{R}, g_m(x) > 0$. (0,75pt)

Partie B (4, 75 points)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{4x^2-1} - 4x < 0$ b) $\sqrt{3(x^2-1)} > 2x-1$ c) $\sqrt{x^2-6x+2} \leq |3x+1|$ (0,5 pt x 2 + 0,75)

- 2) Résoudre les systèmes d'équations suivantes si possible en discutant suivant les valeurs du

$$\text{réel } m : (S_1): \begin{cases} (m-1)x - 2y = \frac{2}{3m} \\ 4x - (m+1)y = m+1 \end{cases} \quad (0,75 \text{ pt}) \quad (S_2): \begin{cases} (m-1)x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad (0,75 \text{ pt})$$

$$(S_3): \begin{cases} 2x - y - 2z = 6 \\ x + y + z = 1 \\ 4x + 5y - z = 9 \end{cases} \quad (0,5 \text{ pt}) \quad (S_4): \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad (0,5 \text{ pt})$$

Partie C (4,5 points)

1) Soit le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 1$. P admet trois zéros a , b et c . Sans déterminer les zéros, calculer $X = a + b + c$; $Y = abc$; $Z = a^2 + b^2 + c^2$;

$$T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad . \quad (1,5 \text{ pt})$$

2) On considère une application f_m définie par de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = mx^2 - 2(m+1)x - 3m \quad \text{où } m \in \mathbb{R}^* . \text{ On désigne par } (C_m) \text{ les courbes de } f_m .$$

a) Montrer que toutes les courbes passent par deux points fixes A et B que l'on déterminera. (0,75 pt)

b) Montrer que $\forall m \in \mathbb{R}^*$, les courbes (C_m) coupent l'axe des abscisses en deux points distincts M et N. (0,75 pt)

c) Montrer que $OM \times ON$ est constant. (0,5 pt)

d) Déterminer m pour que $MN = 2\sqrt{5}$. (0,5 pt)

e) Déterminer m pour que $OM > ON$. (0,5pt)

Exercice 3 (3,5 points)

Pour sa production, une entreprise agro-alimentaire fabriquant deux produits (A et B) se fournit auprès de deux cultivateurs : M. Paul et Mme Gloria. On note x le nombre de tonnes achetées à M. Paul et y le nombre de tonnes achetées à Mme Gloria.

Avec une tonne de M. Paul achetée deux cents mille (200.000) francs, on fabrique 400 produits A.

Avec une tonne de Mme Gloria achetée cinq cents mille (500.000) francs, on fabrique 300 produits B.

On souhaite produire au total plus de 1200 produits, pour un coût de matière première inférieur ou égal à quatre millions neuf cents mille (4.900.000) francs. Par ailleurs, la production de Mme Gloria ne peut excéder celle de M. Paul de plus de 7 tonnes, et M. Paul ne peut pas produire plus de 10 tonnes.

1) Montrer que les contraintes de production correspondent au système suivant :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y \geq 12 \\ -x + y \leq 7 \\ 2x + 5y \leq 49 \end{cases} \quad (1 \text{ pt})$$

2) Représenter graphiquement dans un repère orthonormé (unité : le cm) les solutions de ce système. (1 pt)

3) Le bénéfice b réalisé est de 150 francs sur chaque produit A et de 800 francs sur chaque produit B.

Exprimer le bénéfice b réalisé en fonction de x et y . (0,5pt)

4) Déterminer graphiquement le couple $(x_0; y_0)$ pour lequel le bénéfice est maximal, tout en respectant les contraintes de production. Quel est alors le bénéfice ? (0,5pt x 2)

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°2

EXERCICE 1 : SITUATION PROBLEME
(08 pts)

Pour construire sa maison, ton frère télécharge un plan sur internet qui lui convient et décide de l'adopter. Selon le plan, la concession a une forme rectangulaire $ABCD$ à l'intérieur de laquelle se trouve une piscine. Mais le concepteur n'a pas donné de détails sur la piscine. Il est juste précisé qu'en prenant $\pi \simeq 3$, la piscine a même forme et même périmètre exprimé en mètres que l'ensemble des points M du plan tels que $\| \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} \| = 10$ où α, β et γ sont des réels tels que $\beta < \alpha < \gamma$, tous zéros du polynôme P de degré 3 dont la courbe représentative dans un repère du plan passe par les points $E(1;0)$, $F(-1;24)$, $H(-2;36)$ et $K(0,10)$. Aussi il est mentionné que l'ensemble des points M couvert par le gazon autour de la piscine vérifie la relation $10 \leq \| \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} \| \leq 12$.

Ton frère sollicite ton aide en tant qu'élève de la classe de première C_4 pour connaître le périmètre de la piscine et la surface couverte par le gazon.

Répond à sa préoccupation.

Grille de notation :

Critères	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Barème	2,5 pts	2 pts	2 pts	1,5 pts

EXERCICE 2
(06 pts)

1. Sans recopier le texte, indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.
0,25pt×2
- (a) Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $-2x^4 + 1x^2 - 12 \geq 0$ a pour solution $S = [-2; -\frac{\sqrt{6}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{6}}{2}; 2]$.

(b) Le discriminant du polynôme du second degré défini par $cx^2 + ax + b$ ($c \neq 0$) est donné par $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. Pour chacune des questions suivantes, choisir la réponse correcte en écrivant juste la lettre correspondante.
0,5pt×4
- (a) Le polynôme $x \mapsto x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ a pour forme factorisée :

i) $(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$;
ii) $(x - 1)(x^2 + 5x + 6)$;
iii) $(x - 1)(x^2 - 6)$;
iv) $(x - 1)(x^2 - 5x - 6)$.

(b) Pour tous points A, B et G du plan, si $\overrightarrow{GA} = -6\overrightarrow{BA}$, alors :

i) $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -6)\}$;
ii) $G = \text{bar}\{(A, -6); (B, 1)\}$;
iii) $G = \text{bar}\{(A, -6); (B, 7)\}$;
iv) $G = \text{bar}\{(A, 7); (B, -6)\}$.

(c) L'application $x \mapsto (x + y; xy)$ défie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ est une application :

i) injective;
ii) surjective;
iii) bijective;
iv) ni injective ni surjective.

(d) L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation irrationnelle $\sqrt{-2x + 12} < x - 2$ est :

i) $S = [2; 6]$;
ii) $S = [2; +\infty[$;
iii) $S = [4; 6]$;
iv) $S =]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[$.
3. Sans recopier le texte, compléter devant la lettre correspondante par le mot ou l'expression manquant(e).
0,5pt×4
- (a) Pour déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés, on peut remplacer certains d'entre eux par leur $\cdots \mathbf{a} \cdots$, affecté de la somme de leurs coefficients à condition que cette somme soit $\cdots \mathbf{b} \cdots$.
Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative du polynôme $x \mapsto -3x^2 + x + 4$ est une $\cdots \mathbf{c} \cdots$ dont le sommet a pour coordonnées $\cdots \mathbf{d} \cdots$.
4. Préciser les conditions C_1, C_2 et C_3 suivantes :
0,25pt×3
- Une équation du second degré admet deux solutions distinctes x_1 négative et x_2 positive telles que $|x_1| > |x_2|$ si :
 $C_1 : \cdots \cdots \cdots$; $C_2 : \cdots \cdots \cdots$ et $C_3 : \cdots \cdots \cdots$
5. Préciser les possibilités P_1, P_2 et P_3 suivantes :
0,25pt×3
- Pour tous points A et B du plan, α et β des nombres réels non tous nuls, l'ensemble des points M du plan tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ où k est un paramètre réel peut être :
 $P_1 : \cdots \cdots \cdots$ ou $P_2 : \cdots \cdots \cdots$ ou $P_3 : \cdots \cdots \cdots$

EXERCICE 3

(06 pts)

On considère dans le plan ($\mathcal{P}$) un triangle équilatéral ABC de côté a (a est un nombre strictement positif).

1. Soit D le barycentre des points pondérés (A, m) ; $(B, -m)$ et $(C, m-3)$ où m est un paramètre réel.

(a) Déterminer l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles D existe.

0,25pt

(b) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et en déduire l'ensemble (K) décrit par D lorsque m décrit E .

0,75pt

Dans la suite de l'exercice, on pose $m = 2$.

2. Construire le point D .

0,5pt

3. (a) Déterminer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de a .

0,25pt

(b) Montrer que BCD est un triangle rectangle en B .

0,5pt

4. Calculer les distances CD , BD et AD en fonction de a .

1,5pt

5. Pour tout point M de ($\mathcal{P}$), on pose $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ et on désigne par (F) l'ensemble des points M de ($\mathcal{P}$) tels que $f(M) = k$ avec k un nombre réel.

(a) Déterminer k pour que C appartiennent à (F) .

0,5pt

(b) Exprimer $f(M)$ en fonction de MD et de a .

0,5pt

(c) Déterminer et construire (F) pour la valeur de k trouvée au numéro 5-a).

0,75pt

6. Pour tout point M de ($\mathcal{P}$), on pose $g(M) = 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} + a^2$.

Déterminer et construire l'ensemble (G) des points M de ($\mathcal{P}$) tels que $g(M) = a^2$.

0,5pt

EXERCICE 1 : (8 pts)

L'une des missions de l'Institut National de Formation Agricole (INFA) de Tové qui est un établissement public, est la formation initiale des professionnels dans le domaine agro-sylvo-pastoral aptes à s'installer comme entrepreneurs agricoles ou à servir dans le secteur public ou privé. Trois jeunes étudiants Mawuli, Koffi et Esso viennent de terminer leur formation brillamment et reçoivent comme récompense d'une ONG de promotion de l'excellence, deux parcelles de terrain à partager. Les membres de l'ONG exigent qu'ils partagent la première parcelle proportionnellement à leurs âges et la deuxième parcelle doit être exploitée en commun. Koffi est âgé de 24 ans, le quotient de l'âge de Mawuli par celui de Koffi est égal au quotient de l'âge de Koffi par celui de Esso. La somme de leurs âges est égale à 74 ans.

Le géomètre topographe invité pour le levé topographique informe que :

- La première parcelle est un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 5 décamètres. Pour un point I fixe du cercle, la mesure de l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ vérifie la relation $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 0$ où M désigne un sommet du polygone régulier.
- La deuxième parcelle est l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq 0$; A et B sont des points fixes de la parcelle tels que $AB = 14$ décamètres.

Les trois lauréats souhaitent clôturer la deuxième parcelle avec du barbelé en laissant une ouverture d'un mètre. Ils ignorent le prix du barbelé mais Koffi se rappelle que n mètres coutent 1 520 F CFA; n étant l'entier naturel vérifiant la relation $2n - \sqrt{n+5} = 5$

Mawuli le moins âgé des trois étudiants, partage toutes ces informations avec sa petite sœur Anne en classe de 1^{ère} C4. Anne demande à son frère l'étendue des parcelles qu'il a obtenues et le prix total des barbelés. Ce dernier lui répond que ces données ne sont pas encore déterminées et que c'est une tâche attribuée à leur aîné en âge, Esso. La petite Anne très impatiente vient solliciter ton aide afin de trouver ensemble les réponses à ces questions.

Consigne 1 : trouve l'étendue des terrains obtenus par chacun des trois jeunes étudiants.

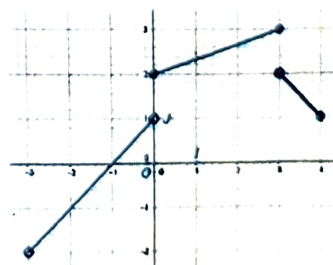
Consigne 2 : Détermine le prix total des barbelés à utiliser.

	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	1,5pt	1,25pt	1pt	0,5pt
Consigne 2	1,5pt	1,25pt	1pt	

EXERCICE 2 : (6pts)

1- Compléter le texte suivant par des termes qui conviennent. (Utiliser seulement les numéros) (8 × 0,25pt)

- a) Soit g une application de ... (1) ... vers $]-2;3]$ dont la courbe représentative (C) dans le repère (O, I, J) est donnée ci-contre. Soit m un élément de $]-2;3]$ et (Δ_m) la droite d'équation $y = m$; l'ensemble des antécédents de m par g est l'ensemble ... (2) ... des points de $(C) \cap (\Delta_m)$. On observe graphiquement que pour tout ... (3) ..., $(C) \cap (\Delta_m)$ est un singleton. Donc que tout élément m de $]-2;3]$ possède un unique antécédent par g dans ... (4) On dit que g est ... (5)
- b) La transformation de la somme $\sin x + \sin 3x + \sin 2x$ en produit est ... (6) la transformation du produit $\cos 3x \sin 5x$ en somme est ... (7) La mesure principale de l'angle orienté de mesure $-\frac{83\pi}{11}$ est ... (8) ...



II. Relier chaque élément du tableau A à l'élément du tableau B qui lui est égal. (4 × 0,25pt)

Tableau A
$\sqrt{1 + \sin 4x}$
$\sqrt{2(1 + \sin x)(1 + \cos x)}$
$\sqrt{\cos^8 x}$
$\sqrt{\sin^8 x}$

Tableau B
$\frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$
$ \sin 2x + \cos 2x $
$\frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$
$ 1 + \cos x + \sin x $

III. Choisir la bonne réponse.

(6 × 0,5pt)

1. a, b, c sont trois nombres réels vérifiant le système
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 19 \\ ab + ac + bc = 15 \\ abc = 9 \\ a + b + c < 0 \end{cases}$$
. Le polynôme P(x) de degré trois dont

a, b, c sont trois zéros est :

- a) $P(x) = x^3 + 7x^2 + 15x - 9$ b) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$
c) $P(x) = x^3 + 7x^2 - 15x + 9$ d) Aucune réponse juste
2. A tout nombre réel m, on associe la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = mx^2 + (m+1)x + 1 - 2m$ et (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . Toutes les courbes (C_m) passent par :
- a) Un point fixe ; b) Trois points fixes ;
c) Deux points fixes ; d) Aucune réponse juste
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{-x+3} + \sqrt{x^2-1}$ a pour ensemble de définition :
- a) $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ b) $]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$ c) $\mathbb{R}$
4. L'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{-x^2+2x+3} > x-1$ admet pour ensemble solution :
- a) $S = [-1; 1 + \sqrt{2}[$ b) $S =]-1; 1 + \sqrt{2}[$ c) $S = [-1; 1 + \sqrt{2}]$ d) Aucune réponse juste
5. Pour tout nombre réel x et y tels que x, y, x + y appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a :
- a) $\tan(x+y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ b) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
c) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ d) Aucune réponse juste
6. Soit A, B et C trois points non alignés du plan, G le barycentre des points pondérés (A, 3); (B, 2); (C, 1) et I le milieu de $[AB]$. L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$ est :
- a) La médiatrice du segment $[IG]$ b) Ensemble vide ;
c) Le cercle de diamètre $[IG]$; d) Le cercle de centre G passant par I

EXERCICE 3 : (6pts)

- I) A, B et C sont trois points non alignés du plan et E le milieu du segment $[AC]$. Soit $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
1. a) Vérifier que $\cos^2 t + \sin^2 t + \cos 2t = 2 \cos^2 t$ (0,5pt)
b) Pour quelles valeurs de t, le système $\{(A, \cos^2 t); (B, \sin^2 t); (C, \cos 2t)\}$ possède un barycentre? (0,5pt)
2. Démontrer que lorsque t décrit $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, G_t décrit une demi-droite d'origine E et de vecteur directeur $\overrightarrow{CB}$ (0,75pt)
3. On suppose que ABC est un triangle rectangle en C tel que $CA = 4$ et $CB = 2$. On note G le barycentre obtenu pour $t = \frac{\pi}{3}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 = 3AB^2 - 2AC^2$$

(0,75pt)

- II) On considère les fonctions : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $x \mapsto \frac{x + \sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ et $x \mapsto |x|$. On désigne par (C) et (C') les courbes

représentatives respectives de f et g dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f. (0,5pt)
2) Montrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C). (1pt)
3) Soit $h(x) = f \circ g(x)$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de h. (1pt)
b) Étudier la parité de h. (1pt)

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°4

Exercice 1 : (8 pts)

Dans la commune de Kozah 3, des maisons assimilables à des points : A, B, C, D, E et F sont construites telles que A, B et C forment un triangle équilatéral de côté 300 m. Les points A, B et F sont respectivement les milieux des segments $[EC], [AD]$ et $[DE]$. Pour les travaux d'urbanisation, le maire a informé et sensibilisé la population qu'il est prévu la construction d'une route rectiligne qui doit passer par les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Ton père, le propriétaire de la maison F , s'inquiète que sa maison se retrouverait sur la nouvelle route à construire et te sollicite pour que tu l'aides à confirmer ou infirmer son inquiétude. Ceci, afin qu'au cas échéant que des démarches administratives soient entreprises en vue d'un éventuel dédommagement.

Consigne 1 : Mets en valeur tes connaissances mathématiques, à travers une production écrite, pour lui donner l'information juste.

Par ailleurs il existe une réserve administrative définie par l'ensemble des points M tels que :

$MA^2 + MB^2 - MC^2 \leq -67500$. Tout propriétaire dont la maison se situerait dans la zone administrative ne sera pas dédommagé.

Consigne 2 : A l'issue de ces informations supplémentaires, est-il possible que ton père soit dédommagé ?

	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	1,5 pt	1 pt	1 pt	0,5 pt
Consigne 2	1,5 pt	1 pt	1 pt	0,5 pt

Exercice 2 : (06 pts)

1. Sans recopier l'énoncé, indiquer à chaque question, la lettre correspondante à la bonne réponse ou la mention **aucune** si aucune des propositions n'est correcte.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Soit $A(1, 1)$; $B(5x; 2)$ et $C(x; y)$ où x et y sont des nombres réels tels que $xy > 0$. Le point $G(x^2; 1)$ est barycentre des points pondérés $(A, -3)$; $(B, -2)$ et $(C, 2)$ si et seulement si :

- a. $x = -3$ et $y = -2$ b. $x = 3$ et $y = 2$ ou $x = -\frac{1}{3}$ et $y = -2$
c. $x = 3$ et $y = 2$ ou $x = \frac{1}{3}$ et $y = 2$ d. $x = 3$ et $y = 2$ (1pt)

2. On considère l'équation d'inconnue x , $(E) : -x^2 - 2ax + b - 1 = 0$, où a et b sont des nombres réels. On désigne par $M(a, b)$ un point du plan. (E) admet une solution double positive lorsque M appartient à :

- (a) la parabole d'équation $y = 1 - x^2$
(b) la portion de la parabole d'équation $y = 1 - x^2$ d'abscisses négatives
(c) la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}(1 - x^2)$ (1pt)
(d) la portion de la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}(1 - x^2)$ d'abscisses positives.

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(I) : \sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x > 0$ est : (1 pt)

- a. $[2; +\infty[$ b. $] - \infty; 0] \cup [2; +\infty[$ c. $[1; 2]$ d. $] - \infty; 1] \cup [2; +\infty[$.

4. L'équation d'inconnue $x : (2m + 3)x^2 - 2(m - 2)x - m + 2 = 0$ n'admet pas de solution lorsque :

- a. $m \in [\frac{1}{3}; 2]$, b. $m \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[$, c. $m \in]\frac{1}{3}; 2[$, d. $m \in]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [2; +\infty[$ (0,75pt)

II. Compléter les phrases suivantes par les mots ou groupe de mots qui conviennent

- Le barycentre de deux points pondérés reste.....a..... lorsqu'on multiplie tous b..... par un c..... nombre réel.....d..... (1 pt)
- Une application f de A vers B est...a... lorsque tout...b... de B admet au plus ...c... par f dans A. (0,75pt)
- Une fonction f est dite.....a..... lorsque pour tout réel x de l'ensemble de définition de f ,.....b..... et $f(x) + f(-x) = 0$. (0,5 pt)

Exercice 3 : (06 pts)

- On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ (0,25 pt)
 - Justifier que g est une application. (0,25 pt)
 - Soit m un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $g(x) = m$ suivant les valeurs de m . (1 pt)
 - L'application g est-elle injective ? surjective ? Justifier. (0,5 pt)
 - Déterminer le plus grand sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ pour que l'application f de $\mathbb{R}$ vers K , $x \mapsto g(x)$ soit bijective. (0,25 pt)
 - Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{1-x}$. (0,5 pt)
 - Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ k$. (0,5 pt)
 - Déterminer pour tout réel x de $D_{h \circ k}$ l'expression de $h \circ k(x)$ sous la forme la plus simple possible. (0,25pt)
 - Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x de D_h , $h(x) = a + \frac{b}{x-1}$ (0,5 pt)
 - d-1. Déterminer une relation entre h et la fonction $i: x \mapsto -\frac{1}{x}$. (0,25 pt)
 - d.2. En déduire que la courbe (C_h) de h s'obtient à partir de la courbe (C_i) de i par une transformation du plan que l'on précisera. (0,25 pt)
 - d.3. Construire (C_i) puis (C_h) dans un même repère. (0,75 pt)
- II. On considère l'équation d'inconnue x , (E) : $3 \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) + m = 0$ avec m un paramètre réel.
- Déterminer m pour que (E) admette des solutions réelles. (0,5 pt)
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) pour $m = \sqrt{6}$ et représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique. (1 pt)

BONNE COMPOSITION

Exercice 1 (08 pts)

Ton papa cherche à acheter un terrain situé en bordure d'une rivière afin de faire le jardin. Il souhaite à cet effet qu'il y ait une route non loin de ce domaine pour faciliter le transport de ses produits. Son voisin, enseignant de Mathématiques, lui propose un terrain qu'il a décrit comme suit. Dans un repère orthonormé du plan, le terrain est délimité par la courbe représentative (C) sur $] -1; 4]$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x^2 + 5x + 1 + m}{m + x}$ et la route rectiligne (Δ) d'équation $y = \alpha x + \beta$ où m est l'abscisse du centre de

la rotation d'expression analytique $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$; α le nombre dérivé en 0 de la fonction

$x \mapsto \frac{x^2 \cos x + 16}{3\sqrt{x+1}}$ et β la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto 16(\sqrt{x^2 + x} - x)$. Aussi il est longé par deux rivières rectilignes, asymptotes de la courbe (C).

Ton papa te soumet ces informations pour que tu lui représente en hachurant le domaine du terrain décrit ainsi que les deux rivières et la route (Δ) pour qu'il apprécie avant d'aller si ça lui plaît, visiter le terrain. En te servant de tes connaissances en Analyse et en géométrie,

Consigne 1. Montre que $f(x) = \frac{4x^2 + 5x + 2}{x + 1}$ et que (Δ) a pour équation $y = -\frac{8}{3}x + 8$

Consigne 2. Répond à la préoccupation de ton papa.

Grille de notation:

Critères	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	1	1	1	1
Consigne 2	2	1	1	

Exercice 2 (06 pts)

I-Pour chacune des expressions : $\sqrt{1 + \sin 4x}$, $\sqrt{2(1 + \sin x)(1 + \cos x)}$, $\sqrt{\cos^8 x}$ et $\sqrt{\sin^8 x}$, **rechercher dans la liste suivante, l'expression qui lui est égale :** $\frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$; $|\sin 2x + \cos 2x|$; $\frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$ et $|1 + \cos x + \sin x|$. (0,5pt×4)

II-Compléter les pointillés par les chiffres où expressions qui conviennent.

1. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ où a, b, c, d et e sont des réels non nuls. Les réels a, b, c, d et e sont tels que:

-la courbe (C_g) admette une asymptote verticale d'équation $x = -1$

-la courbe (C_g) passe par les points $A(0; 2)$ et $B(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2})$.

-la courbe (C_g) passe par le point $C(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3.

Alors: $a = \dots$; $b = \dots$; $c = \dots$; $d = \dots$ et $e = \dots$. (0,25pt×5)

2. La droite des moindres carrés ou droite de régression de Y en X est donnée par: $y = ax + b$. avec $a = \dots$ et $b = \dots$. Cette droite passe par $\dots$. (0,25pt×3)

3. L'homothétie de centre $A(-1; 3)$ et de rapport $-\frac{1}{3}$ a pour expression Analytique $a = \dots$. (0,5pt)

III- Répondre par Vraie ou faux aux affirmations suivantes:

1. Soient (D) et (D') deux axes parallèles et $O \in (D)$, $O' \in (D')$ tels que $(OO') \perp (D)$. Alors la composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la translation de vecteur $2\vec{OO'}$. (0,5pt)

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle α et soit (D) une droite passant par O . On peut décomposer r en la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants en O . La droite (D') telle que $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r$ est obtenue en faisant tourner la droite (D) par rapport à O d'un angle de mesure $\frac{\alpha}{2}$. (0,5pt)

3. Toutes les courbes de la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{(2m-1)x + m}{x - m}$ passent par le point de coor-

données $(0; -1)$

(0,5pt)

Exercice 3 (06pts)

I-1. Soit $(C) : x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ un cercle de centre Ω , de rayon r et $A(x_0; y_0) \in (C)$.

a) Déterminer les coordonnées de Ω en fonction de α et β . (0,5pt)

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en A en fonction de α ; β ; x_0 et y_0 . (0,5pt)

c) Sachant que $A(x_0; y_0) \in (C)$, déterminer une relation entre α ; β ; γ ; x_0 et y_0 . (0,5pt)

d) Vérifier que $(T) : xx_0 + yy_0 + \frac{\alpha}{2}(x + x_0) + \frac{\beta}{2}(y + y_0) + \gamma = 0$. C'est une équation cartésienne de la tangente à un cercle par "dédoublément". (0,5pt)

2. Soit $(C) : x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ et $A(6; 2)$.

a) Caractériser (C) . (0,5pt)

b) Vérifier que $A \in (C)$. (0,5pt)

c) Déterminer alors une équation cartésienne de la tangente à (C) en A de deux manières. (0,5pt)

II- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) .

On désigne par (D) et (D') les droites d'équations respectives $x - 2y + 1 = 0$ et $x + y - 3 = 0$. $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ sont respectivement les symétries orthogonales d'axes (D) et (D') .

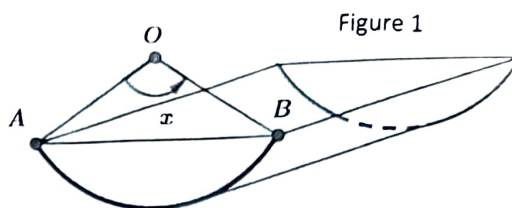
1. Quelle est la nature de $S_{(D')} \circ S_{(D)}$? (0,5pt)

2. Déterminer l'un des éléments caractéristiques de $S_{(D')} \circ S_{(D)}$. (0,5pt)

3. Déterminer les expressions analytiques de (D) et (D') puis en déduire l'expression analytique de $S_{(D')} \circ S_{(D)}$. (1,5pt)

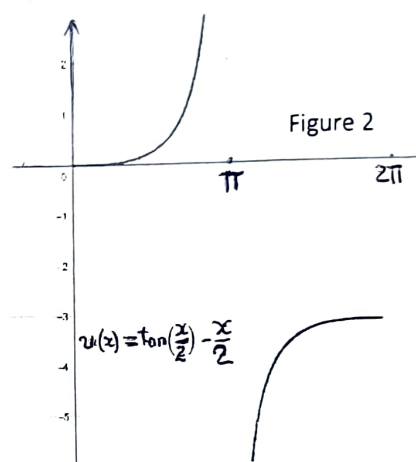
Exercice 1 (8 pts)

Madame BASSOA est une grande agricultrice de sa région. Elle a remis une dizaine de bandes métalliques rectangulaires ayant pour largeur l et pour longueur L ($L \geq l$) à un feronnier de lui fabriquer des auge cylindriques pour le breuvage des bêtes. Pour cela, le feronnier plie la largeur en arc de cercle de façon à obtenir la forme ci-contre.



À la livraison, après vérification Madame BASSOA constate que les auge n'ont pas les mêmes volumes alors que les dimensions des bandes métalliques étaient identiques. Elle désire faire une commande supplémentaire d'auges qui cette fois doivent avoir un volume maximal, mais pour des raisons pratiques d'usages, le feronnier doit considérer la mesure x de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ avec $(0 < x < 2\pi)$ dans ses vœux. Il lui propose donc le tiers du volume maximal théorique l'on peut obtenir.

Le fils du feronnier Agbénigan ayant pris connaissance de cette situation rapporte ce problème en classe afin de le travailler comme exercice avec ses camarades. Son professeur de mathématiques a salué cette initiative puis les a invités à exploiter aussi le document, dans lequel est dessiné la représentation graphique de la fonction $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}$. Voir figure ci-contre.



Dans ce document, il est également démontré que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \left| \frac{x - \sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{6} |x|$.

Consigne 1 : après avoir justifié que le volume de l'auge cylindrique est proportionnel à la surface de la partie grisée sur la figure 1, montre que cette surface est définie par :

$$S(x) = \frac{l^2}{2} \left(\frac{x - \sin x}{x^2} \right)$$

Consigne 2 : détermine l'expression du volume de l'auge que le feronnier propose à Mme BASSOA en fonction de la largeur l et de la longueur L et explique comment le feronnier peut obtenir la valeur de x voulu vu que le point O n'est posé sur aucun support.

Grille de notation

Consignes	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	1,25	1,25	1	1
Consigne 2	1,25	1,25	1	

Exercice 2 (6 pts)

I/ Répondre par Vrai ou faux ($3 \times 0,5pt$)

- On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. la probabilité d'obtenir un nombre pair et premier est égale à $\frac{1}{3}$. (0,5pt)

2. Une urne contient 12 boules indiscernables au touché dont 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 boules jaunes. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne et on note leur couleur dans cet ordre.
- a) le nombre de tirages comportant 3 boules de même couleur est : $A_3^3 + A_4^3 + A_5^3$ (0,5pt)
- b) Le nombre de tirages comportant 3 boules de couleurs différentes est $3! (A_{12}^3 \times A_{12}^3 \times A_{12}^3)$. (0,5pt)

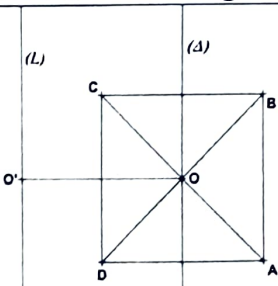
II/ Choisir la bonne réponse parmi les proposées.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x \in \mathbb{R}, \sqrt{-x^2 + 6x - 5} - x + 3 \geq 0$, est : (0,5pt)
2. a) $[1; 3] \cup [3 + \sqrt{2}; 5]$; b) $[1; 3 + \sqrt{2}]$; c) $[1; 5]$; d) $[3 + \sqrt{2}; +\infty[$.
3. ABC est un triangle rectangle en C et G le barycentre des points pondérés (A,1), (B,1) et (C,m) où m est un nombre réel différent de -2. $GA^2 + GB^2 + m GC^2$ est égale à : (0,5pt)
- a. $\frac{m-2}{m+2} AB^2$ b. $\frac{m-1}{m+2} AB^2$ c. $\frac{m+1}{m+2} AB^2$ d. aucune réponse
4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J), on considère le cercle. (C): $x^2 + y^2 + 2x - 6y - \frac{5}{2} = 0$ et la droite $D_m: x - y - m = 0$, m est un paramètre réel.
- A. (D_m) est tangente à (C) lorsque : (0,5pt)
- a. $m \in \{-9; 1\}$ b. $m \in \{-9; -1\}$ c. $m \in \{-1; 1\}$ d. $m \in \{1; 9\}$
- B. (C) et (D_m) coupent en en deux points lorsque :
- a. $m \in]-9; 1[$ b. $m \in]-\infty; -9[\cup]1; +\infty[$ c. $m \in]-9; -1[$ d. $m \in]1; 9[$ (0,5pt)

III/ Compléter les points ou les cases par ce qui convient (2,5pts)

1. A tout nombre réel a on associe la fonction f_a définie par :
 $f_a(x) = ax^2 + (a+1)x + 1 - 2a$ où a est paramètre réel. (C_a) est la représentation graphique de f_a dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
 Toutes les courbes (C_a) passent par deux point fixes de coordonnées..... et (0,25ptX2)
2. La fonction g définie par :
$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x^2 + (m-2)x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+2m}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 où m est paramètre réel. (0,5pt)
- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $m = \dots$.

1. Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de sens direct et de centre O, ci-contre. (Δ) est la médiatrice du segment [CB]. Compléter le tableau suivant : (0,25ptX6)

	Transformations	Nature	Elément(s) caractéristique(s)
	$f = r_{(O, -\frac{\pi}{2})} \circ t_{\overline{DC}}$		
	$h = r_{(D, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{2})}$		
	$l = S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)}$		

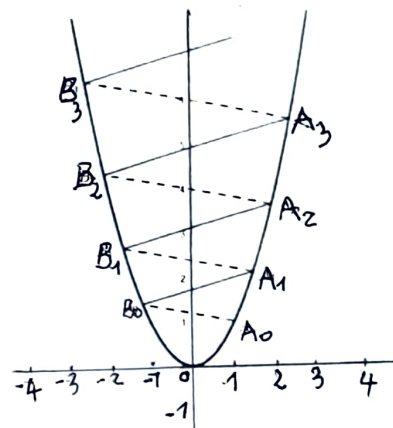
I/ (C) désigne le cercle d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 27 = 0$, et (C') le cercle d'équation cartésienne : $\begin{cases} x = 5 + \sqrt{8} \cos(\alpha) \\ y = 4 + \sqrt{8} \sin(\alpha) \end{cases}$

1. Déterminer les caractéristiques de (C) et (C') de centres respectifs Ω et Ω' et de rayons respectifs R et R'. (4 x 0,25pt)
2. Démontrer que (C) et (C') sont tangents (1,25pt)

3. Déterminer l'équation de (Δ) tangente commune de (C) et (C') (1,25pt)

II/ A partir d'un point A_0 de la parabole d'équation $y = x^2$, on construit les suites de points (A_n) et (B_n) par le procédé suivant :

- Les droites $(A_0B_0), (A_1B_1), \dots, (A_nB_n), \dots$ ont toutes pour pente $-\frac{1}{5}$
- Les droites $(B_0A_1), (B_1A_2), \dots, (B_nA_{n+1}), \dots$ ont toutes pour pente $\frac{1}{4}$



On note a_n l'abscisse de A_n et par b_n celui de B_n .

- 1) Déterminer une relation entre a_n et b_n , puis b_n et a_{n+1} . (1 pt)
- 2) Montrer que les suite (a_n) et (b_n) sont arithmétiques et préciser leur raison. (1 pt)
- 3) Déterminer en fonction de n l'expression de la somme : (0,5pt)

$$S_n = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)$$

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°7

Exercice 1(06,00points)

Partie A Répondre par Vrai ou Faux.

1. On considère les points $A(0, 4)$, $B(-3, 0)$ et $C(3, 0)$.
Une représentation paramétrique du cercle inscrit dans le triangle ABC est

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos \theta \\ y = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sin \theta, \theta \in] - \pi, \pi] \end{cases}$$

(0, 5pt)

2. x et y étant deux nombres réels de $[0, \pi]$. Le système :

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$$

a pour ensemble solution $S = \{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}), (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}), (\frac{11\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12})\}$.

(0, 5pt)

3. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^2 \cos^2(x)$ a pour dérivée la fonction

$$f'(x) = 2 \left[\cos^2(x) - \frac{1}{2} \sin(2x)(x+1)^2 \right]$$

(0, 5pt).

4. Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 2cm$ et (C) le cercle de diamètre $[AB]$; M est un point de (C) . L'ensemble que décrit le centre de gravité G du triangle ABM lorsque M décrit (C) est un cercle de centre celui de (C) et de rayon $\frac{2}{3}$.

(0, 25pt)

5. La composée de deux homothéties de centre distinct n'est pas forcément une homothétie.

(0, 25pt)

Partie B Choisir la bonne réponse parmi les trois propositions.

1. L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \tan(2x + \pi)$ est :

☐ $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ Aucune bonne réponse (0, 5pt)

2. La fonction $x \mapsto (x-1)\sqrt{x-1}$:

☐ est dérivable en 1 ☐ n'est pas définie en 1 ☐ n'est pas dérivable en 1 (0, 5pt)

3. Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de sens direct et R la rotation de centre O transformant A en B .

☐ L'angle de R est $\frac{\pi}{3}$ ☐ ABC est invariant par R ☐ L'angle de R est $-\frac{2\pi}{3}$ (0, 25pt)

4. La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est :

- ☐ a) une symétrie ☐ b) une translation ☐ c) une rotation

(0, 25pt)

5. Soit f une fonction continue en un point x_0 . Si f n'est pas dérivable en x_0 , alors :

- ☐ a) f ne peut admettre d'extrémum en x_0 ☐ b) $f(x_0)$ est un extrémum relatif de f ☐ c) aucune réponse n'est juste sauf s'il y a changement de signe en x_0 .

(0, 5pt)

Partie C

Compléter le texte suivant par des termes qui conviennent. (Utiliser seulement les lettres et ne pas recopier le texte) (2pts)

Le tableau suivant indique les notes obtenues par deux élèves X et Y d'une même classe pour une série de 4 devoirs, a désignant un entier naturel.

Élève X	x_i	8	9	15	8
Élève Y	y_i	7	12	12	a

Pour que les deux élèves aient la même moyenne, il faut que $a = \dots$ ☐ a) $\dots$. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est $r = \dots$ ☐ b) $\dots$. Il n'y a pas donc une $\dots$ ☐ c) $\dots$ entre les $\dots$ ☐ d) $\dots$ X et Y . Dans ce cas, un $\dots$ ☐ e) $\dots$ n'est pas justifié.

Exercice 2(06,00points)

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit m un paramètre réel, et on considère la fonction $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f_m(x) = \frac{x^2 + (m+1)x + 1 - m}{x - 2}$$

de représentation graphique (C_m) .

1. Démontrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point A dont les coordonnées ne dépendent pas de m . (0, 5pt)

2. Déterminer en fonction de m les nombres réels a , b , et c tels que

$$f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

pour $x \neq 2$ puis trouver m pour que (C_m) soit une droite privée du point d'abscisse 2. (0, 75pt)

3. Montrer que pour tout $x \neq 2$,

$$f'_m(x) = \frac{x^2 - 4x - m - 3}{(x - 2)^2}.$$

Pour quelles valeurs de m , f_m est-elle strictement monotone sur chaque intervalle où elle est définie? (1pt)

Partie B

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f_{-1}(x) + 1$, et (C) sa représentation graphique dans le repère précédent.

1. Dresser tableau de variation g .

(1pt)

2. Montrer que la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote à (C) .

Préciser l'équation de l'autre asymptote.

(0, 75pt)

3. Déterminer l'équation de la tangente (T_0) à la courbe (C) au point $O(0, 0)$. Déterminer l'équation de l'autre tangente (T_1) à (C) parallèle à (T_0) .

(1pt)

Partie C

La figure en annexe est la représentation de la courbe (C_h) d'une fonction h

- l'équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_h) au point $O(0, 0)$ est $(T_0) : y = -\frac{1}{2}x$;

- l'équation de la tangente (T_1) à (C_h) parallèle à (T_0) est $(T_1) : y = -\frac{1}{2}x + 12$

- La fonction h admet deux extremums locaux atteints respectivement en $2 - \sqrt{6}$ et $2 + \sqrt{6}$;

- $h(2 - \sqrt{6}) = 1 + \frac{4\sqrt{2} - 8}{\sqrt{6}} \approx 0,86$; $h(1) = -2$ et $h(-1) = 0$.

1. Soit (D) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + t$, où t est un paramètre réel.

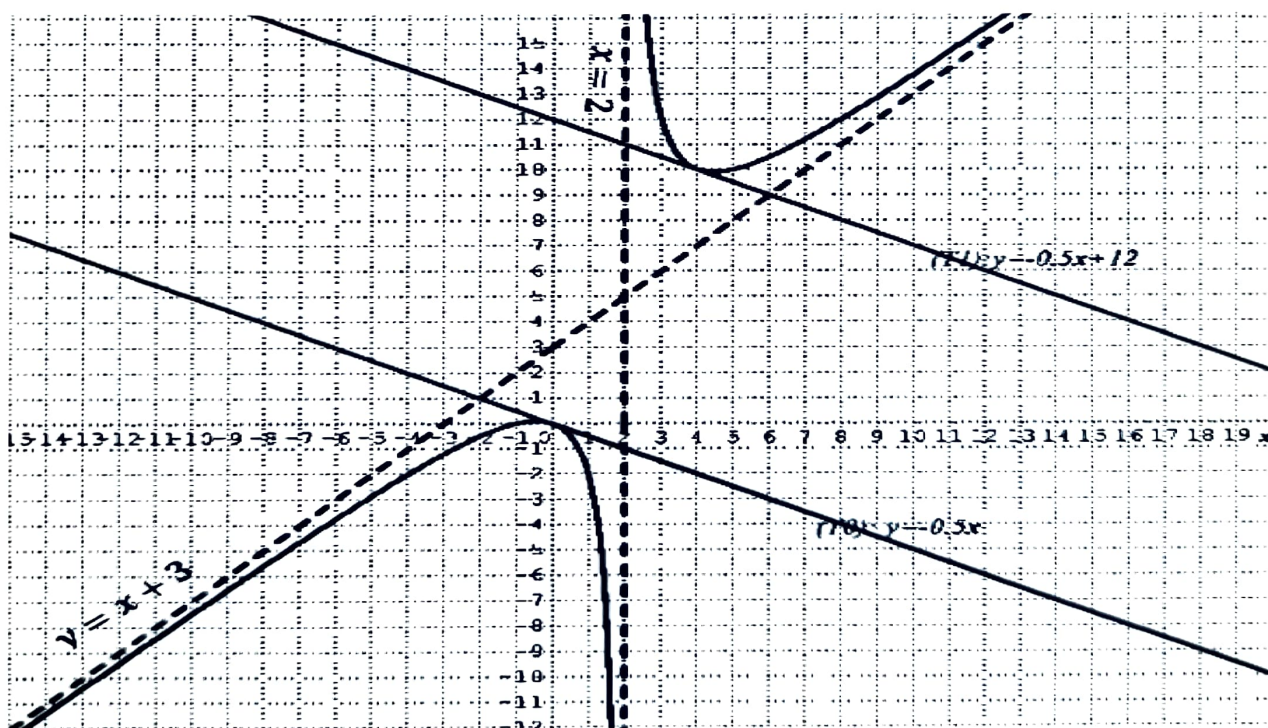
Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de t , le nombre de points d'intersection de (C) et (D) .

(0, 5pt)

2. Utiliser (C) pour discuter également, suivant les valeurs de t , le nombre de solutions de l'équation:

$$\theta \in [0, 2\pi], \cos(2\theta) + 2(1 - t) \cos(\theta) + 4t + 1 = 0.$$

(0, 5pt)



Exercice 3 (08,00 points)

Monsieur et Madame Amah possèdent un terrain et souhaitent l'exploiter en culture de produits maraîchers. Pour cela, ils se proposent d'installer un puits en un point G . Après une prospection des lieux, le technicien de l'équipe de forage a détecté que le puits doit être installé dans une zone sous forme d'un triangle équilatéral ABC de côté a , exprimé en dizaines de mètres. Le technicien fait remarquer que l'emplacement idéal du puits point G est à l'intérieur du triangle de telle sorte que le point G soit barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $4, 2, 2$. Il fait aussi remarquer qu'une zone de sécurité doit être observée autour du puits. Il indique que cette zone correspondant à

l'intérieur du cercle tangent à $[BC]$ et passant par A ne doit comporter aucune culture. La famille Amah souhaite cultiver leurs produits maraîchers sur une surface proche du puits. Le technicien leur fait remarquer qu'alors il suffit de choisir la surface correspondant à l'ensemble des points M tel que

$$2a^2 < 2MA^2 + MB^2 + MC^2 < 3a^2.$$

Consigne 1

En tant que fille ou fils aîné de cette famille en classe de première, aidez les parents à situer le point G , à délimiter la surface indiquée par le technicien et vérifiez si cette surface respecte la zone de sécurité.

Consigne 2

En réalité, les travaux du technicien ont été réalisés en fixant $a = 20$ mètres. La culture des produits maraîchers exige en moyenne **5000 F cfa** de dépenses par mètre carré. Les parents ont une somme de **un millions** pour investir dans cette culture. Ils approuvent aussi l'idée d'une bande circulaire autour de la zone de sécurité. Proposez-leur une nouvelle délimitation de la surface de leur culture, en tenant compte de la zone de sécurité.

BAREME

Perfectionnement: 1pt

Consigne 1

Pertinence	Correction	Cohérence
1,5pts	1,5pt	1pt

Consigne 2

Pertinence	Correction	Cohérence
1pts	1pt	1pt

Ce qui importe, c'est l'effort!!!

Exercice 1 (08,00 points)

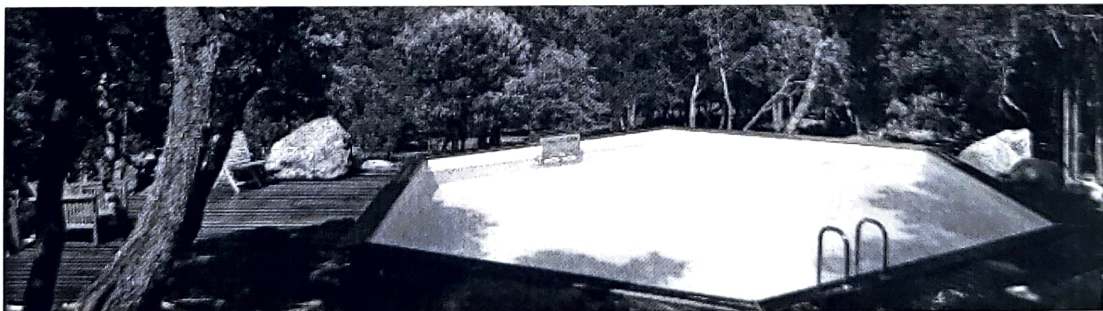
Monsieur AYAM est un jeune entrepreneur togolais, propriétaire d'une chaîne de télévision dénommée OMOTOUNDE-TV dont le chiffre d'affaire en millions de francs CFA est donné sous forme codée pour raison de sécurité par l'expression littérale : $A(x) = ax^2 + bx + c$ où

$(a; b; c)$ vérifie le système :
$$\begin{cases} a + b + c = 75 \\ -a - 2b - c = -51 \\ 2a + 3b + c = 30 \end{cases}$$
 x désignant la durée (en année) de

l'entreprise. Trois ans après la création de son entreprise, Monsieur AYAM constate que son chiffre d'affaire a considérablement chuté. Il contacte alors Madame ELEBOTO, directrice d'une micro finance de la place dans le souci de contracter un prêt. Cette dernière lui exige de relever son chiffre d'affaire à 60 millions de Francs CFA pour bénéficier de son accompagnement.

Par ailleurs, pour la détente de ses employés à des heures de pause, monsieur AYAM souhaite bâtir sur un espace circulaire de rayon 10 mètres, une piscine ayant la forme d'un hexagone (régulier ou non). Le technicien acquis pour la tâche lui propose un plan ayant la forme d'un polygone dont les sommets sont situés sur cette portion circulaire et sont images des solutions de l'équation donnée par : $(E) : 2\cos^2\left(\frac{3}{2}x\right) - 1 = 0$. Pour rendre son entreprise plus attrayant, Il souhaite aussi aménager un espace vert de gazon non loin de la piscine. Son fleuriste lui propose que l'ensemble des points M couverts par le gazon vérifie la relation $3\sqrt{3} \leq \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leq 6\sqrt{3}$ où $A; B$ et C sont des bancs publics équidistants de 6 mètres et non alignés.

Soucieux de connaître le nombre d'années qu'il devra attendre pour que ce prêt lui soit accordé, la surface en mètres carrés de la piscine ainsi que celle de l'espace vert aménagé, il te sollicite. Par une production argumenté, aide à satisfaire les préoccupations d'AYAM.



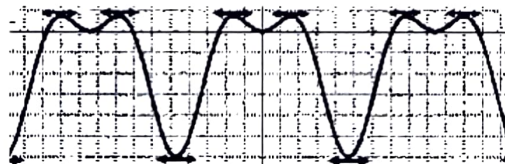
Exercices 2 (06,00 points)

Partie A : Choisir la bonne réponse : (2pts)

- ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$ et $AC = 4$. L'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tel que $MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 = 64$ est :
a. Le singleton G b. le cercle $(G, R = 2)$ c. le cercle de centre G passant par A .
- L'application $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ est
a. bijective b. injective c. aucune réponse
- Le polynôme $p(x)$ de degré trois (3) admettant trois zéros a, b, c vérifiant le système
(S) :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ ab + ac + bc = -5 \\ abc = -6 \end{cases}$$
 est :
a. $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ b. $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ c. aucune bonne réponse.
- À tout nombre réel m , on associe la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = mx^2 + (m+1)x + 1 - 2m$ et on appelle $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J) . Toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par
a. un point fixe b. deux points fixes c. trois points fixes
- Soient les points I, J et K du plan tels que I soit le milieu de $[BC]$; $\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JA} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{KA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Alors
a. les droites (AI) , (JC) et (KB) sont concourantes en deux points.
b. parallèles deux à deux.
c. les droites (AI) , (JC) et (KB) sont concourantes en un point.

Partie B : Réponds par vrai ou faux (0,5pt)×4

- L'application $\mathcal{H}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y; \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)$ est bijective et sa bijection réciproque $\mathcal{H}^{-1}$ est égale à $\mathcal{H}$. (0,5pt)
- Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 4x - 10}{2x + 4} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ le point $A(-2; -4)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (0,5pt)
- $\sin(3x) = 4\sin^3(x) - 3\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (0,5pt)
- La courbe ci-dessous est celle d'une fonction paire, périodique et admet plusieurs axes de symétries. (0,5pt)



Partie C : Compléter les propositions suivantes. (2pts)

- La fonction $x \mapsto \cos\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) + \tan(2x)$ est périodique de période.... (a) (0,5pt)
- Le point S de coordonnées (b) est le sommet de la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x - 5$. (0,5pt)
- L'équation $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$, $S = \dots$ (d) (1pt)

Exercice 3 (06,00 points)

Dans le plan ($\mathcal{P}$), on considère un triangle ABC . Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système $(A, m), (B, 1), (C, 1)$.

1. Déterminer l'ensemble E des valeurs de m pour lesquels G_m existe. (0,5pt)
2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points G_m lorsque m décrit E . (0,5pt)
3. On suppose que $m = 1$ et on appelle G le centre de gravité du triangle ABC . Soit φ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout point M par :

$$\varphi(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \text{ et } f \text{ l'application définie par}$$

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

- 3.1. Démontrer que quel que soit le point M , $\varphi(M) = 3MG^2 + \varphi(G)$ et $\varphi(G) = -\frac{1}{2}f(G)$. (1,5pts)

- 3.2. déduire l'expression de $\varphi(M)$ en fonction de MG, AB, BC, AC . (1pt)

- 3.3. Dans le cas particulier où le triangle ABC est équilatéral de côté a , déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\frac{a^2}{4} < \varphi(M) < \frac{a^2}{2}$. (1pt)

4. Pour tout point M de $\mathcal{P}$ on pose $\overrightarrow{u_M} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$, $AB = AC = 4a$ et $BC = 2a$ où a est un nombre réel strictement positif.

- 4.1. Démontrer que $\overrightarrow{u_M}$ est un vecteur constant. (0,5pt)

- 4.2. Déterminer l'ensemble (Γ) des point M du plan $\mathcal{P}$ tels $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 32a^2$. (1pt)

Bon courage !

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°9

EXERCICE 1 : (8pts)

À l'occasion de la fête traditionnelle de ta préfecture, une réception des invités de marque est prévue à un lieu spécial qui sera sécurisé par une équipe de 5 corps habillés composée de 1 militaire, 2 policiers et 2 gendarmes. L'équipe sera sous la responsabilité d'un comité de 2 personnes choisies au hasard parmi les 5 corps habillés. La voie la plus sûre qui mène au lieu de réception, est assimilable à la courbe représentative de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{10px+1}{x^2-x+5q}$ où p est la probabilité pour que le comité soit composé de 2 gendarmes et q celle pour que ce comité soit composé d'un militaire et d'un policier.

Le président du comité d'organisation, sachant que les invités de marque seront au nombre de 200, arrive sur le lieu de réception pour se renseigner sur le nombre de places disponibles. Le gérant tout en le rassurant de la disponibilité des places lui dit qu'à l'occasion de la fête, une réduction du tarif de location est faite mais conditionnée par une réponse trouvée à l'affirmation suivante : « le nombre de places assises est abn où n est le chiffre des unités, b celui des dizaines et a celui des centaines. En permutant les chiffres b et n , le nombre de places s'augmente de 36 et qu'en permutant les chiffres a et n , on obtient le double du nombre de places moins 6. Enfin, le chiffre n vérifie la relation $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$ ». Le gérant poursuit en disant :

- la bonne réponse donne droit à une réduction de 50% ;
- une mauvaise réponse conduit à une réduction de 10% et
- aucune réponse proposée correspond à 0% de réduction.

Le président du comité d'organisation de la fête, après un temps de réflexion, donne comme réponse 224 places assises et le gérant lui dit qu'il va bénéficier d'une réduction de 10% sur la location de la salle.

Par ailleurs, Dodzi, l'un des invités de marque à cette fête, demande à son fils Koffi, ton camarade de classe, de lui représenter sur un papier la route indiquée.

Consigne1 : À partir de tes connaissances en mathématiques, aide Koffi à faire le travail que son papa lui a demandé en considérant le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où le point O désigne la maison de Dodzi.

Consigne2 : En te basant sur des calculs, justifie la réduction de 10 % accordée au président du comité d'organisation.

Critères	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	1,25 pt	1,25 pt	1 pt	1pt
Consigne 2	1,25 pt	1,25 pt	1 pt	

EXERCICE 2 : (6pts)

Partie A : Sans recopier l'énoncé, indiquer à chaque question la lettre correspondant à la bonne réponse.

1. Soit une fonction numérique $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-E(x)}}$. L'ensemble de définition D_f de f est :

- a) $[-4; 1[$, b) $]-4; -1]$; c) $[-1; 4]$, d) $[0; 4]$. (0,5pt)

2. Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de sens direct et r la rotation de centre O transformant A en B. L'angle de r est :

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{-2\pi}{3}$; d) $\frac{4\pi}{3}$ (0,5pt)

3. L'application $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [\frac{-1}{2}; +\infty[, x \mapsto \frac{x^2-1}{2}$ est une :

- a) bijection ; b) surjection ; c) injection ; d) involution. (0,5pt)

4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow [1; +\infty[, x \mapsto x^2 + 2x + 2$ une application et g sa restriction à l'intervalle $[-1; +\infty[$.

- L'application réciproque g^{-1} est explicitement définie par : a) $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow [1; +\infty[, x \mapsto -1 + \sqrt{x-1}$,
b) $g^{-1}: [1; +\infty[\rightarrow [-1; +\infty[, x \mapsto -1 - \sqrt{x-1}$, c) $g^{-1}: [-1; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[, x \mapsto -1 - \sqrt{x-1}$,
d) $g^{-1}: [1; +\infty[\rightarrow [-1; +\infty[, x \mapsto -1 + \sqrt{x-1}$. (0,5pt)

Partie B : Compléter les phrases suivantes en utilisant les numéros et les lettres sans recopier toute la phrase.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{7}$. (4×0,25pt)
- Une mesure de $(2\vec{u}, \vec{v})$ est...a...
 - Une mesure de $(\vec{u}, -3\vec{v})$ est...b...
 - Une mesure de $(-2\vec{v}, \vec{u})$ est...c...
 - Une mesure de $(-2\vec{v}, -\vec{u})$ est...d...
2. Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 10}$ une série statistique à deux caractères quantitatifs telle que $x_i = \frac{10}{2^i}$ et $y_i = i^2$. Son point moyen G a pour coordonnées à 0,1 près $\bar{x} = \dots a \dots$ et $\bar{y} = \dots b \dots$ (0,5pt + 0,5pt)
3. Le nombre total de numéros téléphoniques au Togo commençant par 9 est ...a... (0,5pt)
4. L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $x \in]-\pi, \pi]$, $\cos(2x) \leq \frac{1}{2}$ est $S = \dots a \dots$ (1pt)
5. $\overline{BAC1}^{16}$ est un nombre entier naturel écrit en base hexadécimale, son écriture en base 10 est ...a... (0,5pt)

EXERCICE 3 : (6pts)

Les parties I et II sont indépendantes.

I. Soit $ABCDEFGH$ un cube comme représenté ci-dessous. On place les points I, J et K respectivement au milieu des côtés $[DC]$, $[GH]$ et $[DH]$. On fixe le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{u} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$ est un vecteur normal au plan (AEI) . (1pt)

2. En déduire une équation cartésienne du plan (AEI) . (0,5pt)

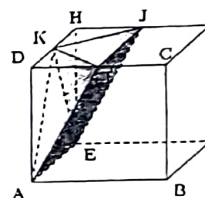
3. Calculer la distance du point K au plan (AEI) . (0,5pt)

4. Donner une équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$,

perpendiculaire au plan (AEI) et passant par K .

En déduire les coordonnées du point d'intersection H de $(\mathcal{D})$ avec le plan (AEI) .

(0,5pt + 0,5pt)



II. ABC et CAD sont deux triangles isocèles tels que : $AB = AC = CD$, $\text{Mes}(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = \frac{\pi}{4}$, $\text{Mes}(\widehat{CD}, \widehat{CA}) = \frac{\pi}{2}$

1. Soit r_A la rotation de centre A qui transforme B en C, r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_C \circ r_A$.

- 1.1. Déterminer les images par f de A et B. (0,5 pt)
- 1.2. Démontrer que f est une rotation, dont on précisera le centre Ω et l'angle. (0,75 pt)
2. Soit s la similitude directe de centre Ω , qui transforme A en B. On note C' l'image de C par s , H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par s .
- 2.1. Déterminer l'angle de s . (0,5 pt)
- 2.2. Démontrer que C' appartient à la droite (ΩA) . (0,5 pt)
- 2.3. Démontrer que H' est le milieu du segment $[\Omega B]$. (0,25 pt)
- 2.4. Démontrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (ΩB) . (0,25 pt)
- 2.5. En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle ΩBC . (0,25 pt)

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°10

EXERCICE 1 (5pts)

1. Soit m un réel, on considère, l'équation (E) $x \in [0; 2\pi[; \cos^2 x + 3\cos x + m = 0$
 - a. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation (E) (1.5pt)
 - b. Résoudre l'équation (E) pour $m = -\frac{7}{4}$ (0.5pt)
2. On donne $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$
 - a. Calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$. (0.75pt)
 - b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \frac{1+\sqrt{5}}{4} = 0$ (0.75pt)
 - c. Calculer $(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$ et déterminer les solutions de l'équation $\frac{3+\sqrt{5}}{8} - \cos^2(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$ (1.5pt)

EXERCICE 2 (7pts)

Le plan P est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soient $A(0, a)$, $B(b, 0)$ et $C(c, 0)$; où a , b et c sont trois nombres réels non nuls tels que : $|b| \neq |c|$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de chacune des droites (AB) et (AC). (0, 5pt)
2. Soit (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ équidistants des droites (AB) et (AC).
 - a) Montrer que $M(x, y)$ appartient à (E) si, et seulement si,

$$(a^2 + c^2)(ax + by - ab)^2 = (a^2 + b^2)(ax + cy - ac)^2$$
. (0, 5pt)
 - b) En déduire que (E) est la réunion de deux droites notées (Δ_1) et (Δ_2) dont on précisera les équations cartésiennes. (1pt)
 - c) Vérifier que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires. (0, 5pt)
3. Soient P_1 et P_2 les points d'intersection respectifs de (Δ_1) et (Δ_2) avec la droite (BC).
 - a) En utilisant la question 2.a), montrer que les abscisses des points P_1 et P_2 sont les solutions de l'équation du second degré (E) : $(c+b)x^2 + 2(a^2 - bc)x - a^2(b+c) = 0$. (0, 5pt)
 - b) Sans résoudre l'équation (E), démontrer les égalités suivantes :

$$AB^2 \times P_1C^2 = AC^2 \times P_1B^2$$
; (0, 5pt)

$$\frac{P_1B^2}{P_1C^2} = \frac{P_2B^2}{P_2C^2}$$
. (0, 5pt)
4. On note (C) le cercle circonscrit au triangle ABC d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, où α , β et γ sont des nombres réels.
 - a) Montrer que α , β et γ sont solutions du système :

$$\begin{cases} \gamma + b\alpha = -b^2 \\ \gamma + c\alpha = -c^2 \\ \gamma + a\beta = -a^2 \end{cases}$$
 - b) Déterminer alors α , β et γ en fonction de a , b et c . (0, 75pt)
 - c) Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle (C) en fonction de a , b et c . (0, 5pt)
 - d) On pose $a = b = \frac{1}{2}c$. Soit (D_m) la droite d'équation $y = -mx$, où m est un paramètre réel.

Démontrer qu'il existe exactement deux droites (D_{m1}) et (D_{m2}) tangentes à (C) que l'on précisera. (1pt)

e) Déterminer les coordonnées du point de contact de ces droites avec (C), en fonction de m et a .

PROBLEME (7pts)

A tout nombre réel m , on associe la fonction f_m définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{(m-1)x+3}{x+2-m}$ et on note (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

A) 1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_m de f_m ? (0,5pt)

b) Déterminer en fonction de m les réels a et b tels que pour tout x élément de D_m , $f_m(x) = a + \frac{b}{x+2-m}$ (0,75pt)

2) a) Démontrer que le point $\Omega_m(m-2; m-1)$ est centre de symétrie de (C_m). (0,75pt)

b) Déterminer l'ensemble ($\mathbb{I}$) des points Ω_m quand m varie ? (0,5pt)

B) On pose $m=0$

1) a) Etudier le sens de variation de f_0 et donner son tableau de variation (1.5pt)

b) Construire la courbe (C_0) (1pt)

2) Montrer que f_0 est bornée sur $[-1; 1]$ (0,75pt)

3) Déterminer suivant les valeurs du paramètre k , le nombre de solution de l'équation :

$x \in \mathbb{R}, f_0(x) = k$ (1pt)

4) Soit g la restriction de f_0 à l'intervalle $]-2; +\infty[$

a) Justifier que g est une bijection de $]-2; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. (0,75pt)

b) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ puis construire sa courbe (γ) dans le même repère que (C_0). (1pt)

Exercice 1 : (4,5points)

1. Soit ABC un triangle. On pose $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$. On désigne par I le point d'intersection de (BC) avec la bissectrice de l'angle $\hat{A}$. La droite parallèle à (AI) passant par C coupe (AB) en D .
 - a) Faire une figure. (0,5pt)
 - b) Démontrer que ACD est isocèle et que $\frac{IB}{IC} = \frac{c}{b}$. (1pt)
 - c) En déduire que le point I est le barycentre des points pondérés $(B; b)$ et $(C; c)$. (0,5pt)
 - d) Enoncer une propriété analogue concernant le point d'intersection du côté $[AC]$ avec la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. (0,5pt)
 - e) En déduire que le centre G du cercle inscrit dans le triangle ABC est le barycentre des points pondérés $(A; a)$, $(B; b)$ et $(C; c)$. (0,75pt)
2. On considère les points $A(1; 5)$, $B(-3; 3)$ et $C(5; -3)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les coordonnées du centre G du cercle inscrit dans le triangle ABC . (1,25pt)

Exercice 2 : (4points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient α un réel strictement positif et θ un paramètre réel ; (D) est la droite dont une équation est :

$$x \sin \theta + y \cos \theta - \frac{\alpha}{2} \sin 2\theta = 0 ;$$

(D') est la droite dont une équation est : $x \cos \theta - y \sin \theta - \alpha \cos 2\theta = 0$.

1. Montrer que les droites (D) et (D') sont perpendiculaires. (0,5pt)
2. Déterminer l'ensemble E des réels θ tels que (D) soit parallèle à l'axe des abscisses ou à l'axe des ordonnées. (1pt)
3. On appelle M et N les points d'intersection de (D) avec respectivement l'axe des abscisses et celui des ordonnées, lorsque (D) est sécante avec chacune de ces deux droites.
 - a) Montrer que la distance MN ne dépend pas de θ . (1pt)
Soit I le point tel que le quadrilatère $OMIN$ soit un rectangle.
 - b) Montrer que I appartient à (D') . (0,5pt)
 - c) Quel est l'ensemble décrit par I quand θ décrit $\mathbb{R} - E$? (1pt)

Problème : (11,5points)

Soient f et g les fonctions numériques de la variable réelle x définies par : $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 2}$

et $g(x) = x^2 + 2x + 1$. On désigne par (C) et (P) leurs courbes représentatives

respectives dans un repère orthogonal (O, I, J) (en abscisse 1cm pour 1 unité, en ordonnée 1cm pour 5 unités).

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (1,25pt)

Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles. (0,25pt)

2. Déterminer la dérivée f' de f puis calculer $f'(1)$. (0,75pt)

3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (1,5pt)

4.a) Trouver a, b, c et d tels que $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-2}$. (1pt)

b) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x) - g(x)$. (0,5pt)

Que peut-on en déduire sur les courbes de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P})$. (0,25pt)

c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P})$. (0,5pt)

5.a) Pour quelle(s) abscisse(s) x_0 la tangente au point d'abscisse x_0 est-elle horizontale ? Justifier. (0,5pt)

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en $x = 3$. (0,5pt)

6.a) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec les axes du repère. (0,75pt)

b) Construire $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{P})$ puis (T) dans un même repère. (1,75pt)

7. On considère l'équation $(E_m): x \in \mathbb{R}, x^3 - (m+3)x + 2(m+1) = 0$; où m est un paramètre réel.

Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre des solutions de l'équation (E_m) . (0,75pt)

8. Soit la fonction h définie par $h(x) = f(|x|)$.

a) Préciser l'ensemble de définition de h et étudier sa parité. (0,5pt)

b) Construire, sans l'étudier, la rep

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°12

Exercice 1 Trigonométrie et transformation du plan

[5pts]

A Trigonométrie

[2pts]

On considère l'équation $(E) : 2\sqrt{2}\cos^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos x - 1 = 0$ et le polynôme $P(x) = 2\sqrt{2}x^2 + (2 - \sqrt{2})x - 1$ de variable réelle x .

- 1 Calculer $P(\frac{1}{2})$. [0.25pt]
- 2 vérifier que p admet deux racines distinctes. [0.25pt]
- 3 En utilisant la somme ou le produit des racines, déterminer l'autre racine. [0.5pt]
- 4 En déduire dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, l'ensemble solution de l'équation (E) . [0.5pt]
- 5 Placer les points images des solutions (E) sur un cercle trigonométrique. [0.5pt]

B Transformations du plan

[3pts]

Dans le plan orienté, on considère le triangle équilatéral direct ABC . On construit les triangles équilatéraux directs ADB et ACE . G_1 et G_2 désignent respectivement les centres de gravité des triangles ADB et ACE .

- 1 Montrer que (CD) et (BE) sont les médiatrices respectives de $[AB]$ et de $[AC]$. [0.5pt]
- 2 On considère la rotation r de centre A qui transforme D en C .
 - a Déterminer l'image de B par r . [0.25pt]
 - b Déterminer l'angle de la rotation r . [0.25pt]
 - c Démontrer de deux manières différentes que G_2 est l'image de G_1 par r . [0.5pt]
- 3 Soit C' l'image de C par r ; montrer que C est le symétrique de B par rapport à A . [0.5pt]
- 4 I est le point d'intersection de (BE) et (CD) ; montrer que :
 - a $CD = BE$ et que $\widehat{(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CD})} = \frac{2\pi}{3}$. [0.5pt]
 - b I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC . [0.5pt]

Exercice 2 Suites numériques

[3.5pts]

On considère deux suites réelles (U_n) et (V_n) définies par :
 $U_1 = 2$ et $V_1 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{2U_n + 3V_n}{5}$, $V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5}$.

- 1 Calculer U_2 et V_2 [0.5pt]
- 2 Pour tout entier naturel non nul n , On pose $W_n = V_n - U_n$.
 - a Démontrer que W_n est une suite géométrique. [0.5pt]
 - b Exprimer W_n en fonction de n . (W_n) converge-t-elle? [0.5pt]
 - c Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante. [0.5pt]
- 3 Soit (t_n) , la suite de terme général $t_n = \frac{1}{3}U_n + V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 - a Démontrer que (t_n) est une suite constante. [0.5pt]
 - b Déduisez-en les limites des suites (U_n) et (V_n) . [0.5pt]
- 4 Énoncer les tapes de la démonstration par récurrence. [0.5pt]

Le problème comporte deux parties A et B indépendantes

A Barycentre, fonctions et distance d'un point à une droite [8.5pts]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; On considère $A(0; 2)$, $B(-2; 0)$ et $C(2; 0)$ trois points du plan. On note G le barycentre des points pondérés $(A; 2)$, $(B; 1)$ et $(C; 1)$

- 1
 - a Montrer que le point O est le milieu du segment $[BC]$ [0.25pt]
 - b En déduire que le point G appartient à la droite (AO) . [0.5pt]
 - c Déterminer les coordonnées du point G . [0.5pt]
 - d Montrer que pour tout M du plan, $AM^2 + OM^2 = 2MG^2 + 2$. [0.5pt]
 - e En déduire que l'ensemble (T) des points M du plan tels que $2MA^2 + BM^2 + CM^2 = 28$ est un cercle dont on précisera, le rayon et le centre. [0.5pt]
- 2 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels. On suppose que la courbe de la fonction passe par les points A, B et C .
 - a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$. [0.5pt]
 - b Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 0$. [0.5pt]
- 3 Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{-x^2 + x - 4}{x}$ et (C) sa courbe représentative.
 - a Déterminer l'ensemble de définition D_g de g . [0.25pt]
 - b Déterminer les limites aux bornes de D_g . En déduire une équation de l'asymptote verticale à la courbe (C) . [1.25pt]
 - c Montrer que pour tout x différent de zéro, $g'(x) = \frac{2f(x)}{x^2}$ où g' est la fonction dérivée de g . [0.5pt]
 - d Déduire de 2-b) le sens de variations de g et dresser son tableau de variations. [1.25pt]
 - e Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $g(x) = -x + 1 - \frac{4}{x}$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C) . [0.5pt]
 - f Déterminer la distance du point G à la droite (D) et en déduire que la droite (D) est sécante au cercle (T) . Préciser les coordonnées de leurs points d'intersection. [1pt]
 - g Tracer (C) et ses asymptotes [1pt]

B Géométrie dans l'espace [3pts]

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère quatre points P, Q, R, S . On appelle J le barycentre du système de points pondérés $\{(P, 1); (R, 3)\}$ et K celui du système de points pondérés $\{(Q, 1); (S, 3)\}$.

- 1 Montrer que $\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{RS} = 4\overrightarrow{JK}$. [1pt]
- 2 Montrer que si J et K sont des confondus, alors P, Q, R et S sont coplanaires. [0.5pt]
- 3 On suppose dans la suite que l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont deux plans, d'équations cartésiennes respectives : $x + y - z - 2 = 0$ et $x - 2y + z - 3 = 0$ [0.5pt]
 - a Déterminer Deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ respectivement normaux à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ [0.5pt]
 - b Montrer que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires. [0.5pt]
 - c En déduire la position relative de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$. [0.5pt]

« Tout le monde est un génie. Mais si vous jugez un poisson à sa capacité de grimper à un arbre, il passera toute sa vie en croyant qu'il est stupide. » **Albert EINSTEIN**

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°13

EXERCICE 1 4.5pts

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm$.

1. Construire le point C du plan tel que $\widehat{mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et $AB = AC$. 0.5pt
2. Soit D tel que ACD soit équilatéral et $\widehat{mes(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})} \equiv \frac{17\pi}{3} [2\pi]$.
Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$ et construire D . 1pt
3. Construire le point E tel que $\widehat{mes(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC})} \equiv \frac{11\pi}{12} [2\pi]$ et $DE = 3cm$. 0.75pt
4. Démontrer que $(AB) // (ED)$. 0.75pt
5. Construire F tel que A, F et C soient alignés et $\widehat{mes(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD})} \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$. 0.75pt
6. Démontrer que $(AB) \perp (BF)$. 0.75pt

EXERCICE 2 6.5pts

1. En remplaçant x dans le développement de $(1+x)^n$ par des valeurs convenablement choisies, calculez :
 a- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n$. 0.5pt
 b- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^p C_n^p + \dots + (-1)^n C_n^n$. 0.5pt
2. a- Démontrer que $\forall n, p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$, $p C_n^p = n C_{n-1}^{p-1}$. 0.75pt
 b- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + n C_n^n = n 2^{n-1}$. 0.75pt
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant : $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+1} \\ 4C_x^y = 5C_x^{y-1} \end{cases}$. 1pt
4. Soit n un entier naturel non nul :
 Démontrer que $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2}{(n+1)!}$. 1pt
5. Soient $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$ deux ensembles.
 On considère l'ensemble des codes formés de 7 éléments de E (distincts ou non) suivis de 3 éléments de F (distincts ou non).
 a- Quel est le nombre de codes possibles ? 0.5pt
 b- Quel est le nombre de codes composés de 7 chiffres distincts ? 0.75pt
 c- Quel est le nombre de codes composés d'éléments tous distincts ? 0.75pt

PROBLEME 9pts

Partie A 5.5pts

ABC est un triangle isocèle tel que $AB = AC = 7$ et $BC = 4$. On désigne par I le milieu de $[BC]$, G le centre de gravité de ABC et $Q = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.

1. Construire le point Q dans une figure qu'on comptera au fur et à mesure. **0.5pt**
2. Déterminer et construire les ensembles suivants :
 - a- $(\varepsilon) = \{M \in (P) / \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 12\}$. **0.75pt**
 - b- $(\gamma) = \{M \in (P) / -2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 38\}$. **1pt**
3. a- Calculer AG et BG . **1pt**
b- Déterminer et construire l'ensemble $(\pi) = \{M \in (P) / AM^2 + BM^2 + CM^2 = 65\}$. **1pt**
4. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :
 $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$
 - a- Vérifier que (Γ) . **0.5pt**
 - b- Déterminer et construire (Γ) . **0.75pt**

Partie B 3.5pts

On dispose de trois pièces de monnaie : une de $100F$, une de $50F$ et une de $25F$.

On veut déterminer toutes les sommes que l'on peut constituer avec ces pièces.

1. Systématiser cette recherche à l'aide d'un arbre de choix. **1pt**
2. Déterminer le nombre de résultats possibles. **0.75pt**
3. Donner toutes les sommes possibles. **1pt**
4. Donner la somme totale que l'on aura. **0.75pt**

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°14

Exercice 1 5pts

A) Soit A, B, C trois points distincts non alignés du plan (P). Soit a un réel.
On considère l'application f_a , qui à tout point M de (P) associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

- Déterminer a pour que f_a soit une translation dont on précisera le vecteur ; on note a_0 la valeur trouvée.
- a est différent de a_0 dans toute la suite de l'exercice.
 - Montrer que f_a admet un seul point invariant, noté Ω_a .
 - Quel est l'ensemble des points Ω_a lorsque a décrit $\mathbb{R} \setminus \{a_0\}$.
 - Montrer que si de plus a est distinct de 1, f_a est une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques. Que peut-on dire de f_1 ?

B) Dans le plan orienté P, on considère un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon r et O' un point tel que $OO' = 3r$.

Soit R la rotation de centre O' et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

On pose $f = \text{Rot}$.

- Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
 - Déterminer l'image de ($\mathcal{C}$) par f . Faire une figure où l'on prendra $r = 3\text{cm}$.
 - Déterminer et construire Ω , centre de la rotation f .
- M étant un point de ($\mathcal{C}$) et $M' = f(M)$, on appelle I le milieu de $[MM']$.
 - Déterminer la nature de $\Omega MM'$.
 - En déduire que I est l'image de M par une similitude directe s de centre Ω dont on précisera le rapport et l'angle.
 - Déterminer et construire l'ensemble des points I quand M décrit ($\mathcal{C}$).
 - Déterminer les caractéristiques de s^2 .

Exercice 2 (4pts)

A-/ On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos 3x \cdot \cos^3 x$.

- Etudier la périodicité et la parité de f .
 - En déduire que l'on peut réduire l'ensemble d'étude de f à $[0 ; \pi]$.
 - Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de ($\mathcal{C}_f$).
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3\cos^2 x \sin 4x$.
 - Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.
- Construire la courbe de f sur $[-\pi ; \pi]$.
On expliquera comment à partir de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ on obtient ($\mathcal{C}_f$) sur $[-\pi ; \pi]$.
- Montrer que pour tout nombre réel x $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$ et en déduire que

$$f(x) = \frac{1}{8}\cos 6x + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}.$$

PROBLEME (11pts)

Partie A (3pts)

Pour tout nombre réel x strictement positif, on considère la suite $(S_n(x))$ de nombres réels définie par : pour tout entier naturel

$$n, S_n(x) = 1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} + \dots + \frac{1}{(1+x)^n}.$$

- 1) Pour $x = 1$,
 a-/ Calcule $S_0(1)$, $S_1(1)$, $S_2(1)$ et pour tout entier naturel n , $S_n(1)$.
 b-/ Montre que la suite $(S_n(x))$ converge vers 2.
- 2) Pour tout nombre réel x strictement positif,
 a-/ Calcule $S_n(x)$ en fonction de x et de l'entier naturel n .
 b-/ La suite $(S_n(x))$ est convergente. Calculer alors en fonction de x , sa limite.
- c-/ On définit la suite $(P_n(x))$ par : pour tout entier naturel n , $P_n(x) = -\frac{1}{1+x} + [S_n(1+x)]^2$.

Montre que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$.

Partie B (5pts)

Pour tout nombre réel x , on considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a-/ Calcule, en justifiant vos calculs, les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .
 b-/ Etudie le sens de variation de f .
 c-/ Etablis alors le tableau de variation de f .

2) Etudie la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (Δ) d'équation : $y = 1$.

3) a-/ Pour tout nombre réel x distinct de 1, montrer que : $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-3}{4(1+x)} + \frac{-1}{2(1+x)^2}$.

b-/ Démontre que : pour tout nombre réel x de l'intervalle $]1 ; +\infty[$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > -\frac{1}{2}$.

En déduire que $(\mathcal{C})$ est situé au-dessus de la droite (T_1) d'équation : $2x + 4y - 9 = 0$ sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

c-/ Démontre que : pour tout nombre réel x de l'intervalle $] -1 ; 1[$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < -\frac{1}{2}$.

En déduire que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite (T_1) d'équation : $2x + 4y - 9 = 0$ sur l'intervalle $] -1 ; 1[$.

d-/ Que représente alors la droite (T_1) pour la courbe $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisse 1 ?

4) a-/ Montre que pour tout nombre réel x , $-2x^3 + x^2 + 4x - 3 = (x - 1)^2(-2x - 3)$.

b-/ Montre que la droite (T_1) recoupe $(\mathcal{C})$ en un point B autre que A, dont on précisera les coordonnées

5) Construis $(\mathcal{C})$, (Δ) et (T_1) dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C (3pts)

g est la restriction de f à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et (ξ_1) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a-/ Montre que : pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$.

b-/ Construis (ξ_1) dans un autre repère, puis déduis-en l'image directe de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par g .

2) m est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $]1 ; 3[$.

a-/ Etudie graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$$x \in [0 ; +\infty[, (1 - m)x^2 + (3 - 2m)x + 3 - m = 0$$

b-/ Déduis que g est une application bijective de $[0 ; +\infty[$ sur $]1 ; 3[$.

3) φ est la bijection réciproque de g et (ξ_2) sa courbe représentative ; h la fonction définie par :

$$h(x) = 2 + \varphi(1 + x), (\xi_3) \text{ sa courbe représentative.}$$

a-/ Montre comment (ξ_3) se déduit-elle de (ξ_2) .

b-/ Construis alors (ξ_2) dans le même repère que (ξ_1) .

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 1 C 2025
MATHEMATIQUES	EPREUVE N°15

EXERCICE 1

Une urne contient 6 boules portant le numéro -1 , quatre boules portant le numéro -3 , cinq boules portant le numéro 1 , cinq portant le numéro 3 et cinq boules portant le numéro 2 indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On désigne par a le numéro porté par la première boule et par b , celui porté par la deuxième boule. On considère deux points fixes et distincts A et B d'un plan $(\mathcal{P})$ et l'équation $(E) : a\cos x + b\sin x = 0$.

1. Détermine le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que $-\frac{\pi}{4}$ soit solution de (E) .
2. Détermine le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que les points pondérés (A, a) et (B, b) admettent un barycentre.
3. Détermine le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ soit constant pour tout point M du plan.
4. Détermine le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que les points pondérés (A, a) et (B, b) admettent un barycentre et ce barycentre appartient au segment $[AB]$.

EXERCICE 2

ABCD est un carré de côté a ($a > 0$). On désigne par I le milieu de $[BC]$ et on pose $\alpha = \widehat{AID}$.

1. Détermination de la valeur exacte de α .
 - a. Montre que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{3a^2}{4}$.
 - b. Montre d'une autre façon que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{5a^2}{4} \cos \alpha$.
 - c. Déduis-en la valeur exacte de $\cos \alpha$, puis déduis-en une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
2. On veut déterminer les valeurs de $x \in [-\pi ; \pi]$ tels que $2\cos x + \sin x = 2$ (*).
 - a. Montre que α vérifie la relation (*).
 - b. On suppose que $\alpha = \frac{3\pi}{10}$.
 - b.1) Démontre que : $5\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$.
 - b.2) Déduis-en les valeurs exactes de x .

EXERCICE 3

ABC est un triangle tel que $AB = 5\text{cm}$; $AC = 3\text{cm}$ et $BC = 4\text{cm}$. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, -2)$; $(B, 1)$ et $(C, 3)$. I, J et K sont des points du plan tels que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ et $4\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$.

1. Place les points I, J et K sur la figure.
2. Exprime I comme barycentre des points A et B ; J comme barycentre des points A et C puis K comme barycentre des points B et C.
3. Démontre que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes au point G.
4. Soit l'application $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ où $\mathcal{P}$ désigne le plan.
$$M \mapsto MB^2 + 3MC^2$$

Soit (Γ) la ligne de niveau de 48 de f .

- a. Vérifie que $B \in (\Gamma)$.
 - b. Démontre que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $f(M) = 4MK^2 + \frac{3}{4}BC^2$.
 - c. Détermine et construis (Γ) .
5. Détermine et construis l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\| -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \| = 2\sqrt{10}$

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le point I $(-1 ; 1)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. A tout point $M(x ; 0)$, on associe le point $N(1 ; y)$ tels que les points I, M et N soient alignés.

Démontre que $y = \frac{x-1}{x+1}$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

a. Détermine D_f et vérifie que $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$.

b. On pose $g = f|_{]-1 ; +\infty[}$ et on désigne par $(\mathcal{C}')$ sa courbe.

b.1) Montre que g est une bijection de $]-1 ; +\infty[$ vers $]-1 ; +\infty[$ et définis sa bijection réciproque.

b.2) Montre que g est majorée.

b.3) Par quelle transformation obtient-on la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ de g^{-1} par $(\mathcal{C}')$?

c. Déduis-en que $(\mathcal{C})$ est l'image de $(\mathcal{H})$ par une transformée du plan à préciser.

d. Montre que le point A $(-1 ; 1)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

e. Etudie les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{H})$.

3. Soit la fonction h définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

a. Détermine D_h

b. Sans calculer $f \circ h$, détermine $D_{f \circ h}$.