

COMPOSITION DE LA 1 ère PERIODE 2002 – 2003

EPREUVE DE MATH SERIE : SET DUREE : 04H COEF : 06

EXERCICE 1

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$
 - a) $4x \equiv 4 \pmod{6}$
 - b) $2x \equiv 3 \pmod{5}$
 - c) $\begin{cases} 4x \equiv 4 \pmod{6} \\ 2x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$
- 2) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
 - a) $z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$; $\theta \in \mathbb{R}$
 - b) $z_2 = 1 + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$
 - c) $z_3 = \left[-\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right]^3$

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal directe $(o; \vec{u}; \vec{v})$

(Unité graphique 1cm)

- 1) On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ tel que
 $(E): z^3 - (12 + 3i)z^2 + (45 + 26i)z - 50 - 55i = 0$
Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.
- 2) On note z_0 la solution réelle; z_1 et z_2 les deux autres solutions de (E) avec $|z_1| < |z_2|$. On appelle A le point d'abscisse z_0 ; B le point d'abscisse z_1 et C le point d'abscisse z_2 . Montrer que les points A, B et C sont alignés et que G est le milieu de $[AB]$.
- 3) A l'extérieur du triangle OAB on construit les triangles OOA' et BOB' rectangles et isocèles de sommet O.
 - a) Placer les points A, B, C, A' et B' dans le repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$.
 - b) Soit a' l'affixe de A' et b' l'affixe de B'. Montrer que $a' = -5i$ et $b' = -2 + 3i$.
- 4) Soit $w = \frac{b' - a'}{z_2}$.
 - a) Mettre w sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
 - b) En déduire A' B' en fonction de OC.
 - c) Quelle est la position relative des droites (OC) et (A'B') ?

PROBLEME

- A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x e^{2-x} - 1$
- 1) Déterminer les limites de f à $-\infty$ et à $+\infty$.

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a deux solutions notées α et β .

b) Vérifier que $\alpha \in \left[\frac{1}{7}; \frac{1}{6}\right]$ et $\beta \in [3; 4]$.

c) Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

B) On considère la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{e^{2-x} - 1}{e^{2-x} + x - 2}$$

On note (C) la courbe de g .

1) Soit les fonctions P et d définies sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=e^{2-x}$ et $d(x)=2-x$

a) Représenter sur un même graphique les fonctions P et d en déduire le signe de $P(x)-d(x)$ selon les valeurs de x .

b) Déduire de ce qui précède le domaine de définition de g .

2) a) Montrer que $g'(x) = \frac{-f(x)}{(e^{2-x} + x - 2)^2}$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et dresser le tableau de variation de g ;

c) Montrer que $g(\alpha) = \frac{-1}{\alpha - 1}$ et $g(\beta) = \frac{-1}{\beta - 1}$. Déduire des encadrements de α et β puis un encadrement de $g(\alpha)$ et un encadrement de $g(\beta)$.

3) Construire la courbe de (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

C) On veut résoudre graphiquement l'équation $f(x)=P(x)$ où f et P sont les fonctions définies plus haut

1) Vérifier que 2 est une solution de l'équation $f(x)=P(x)$

2) a) Montrer que $f(x)=P(x) \iff \frac{1+e^{2-x}}{e^{2-x}} = x$

b) Etudier et représenter la fonction $K : x \mapsto \frac{1+e^{2-x}}{e^{2-x}}$ ainsi que la droite $(D): y=x$ sur la même figure.

c) Déduire les solutions de l'équation $f(x)=P(x)$

3) a) Montrer que K est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser.

b) Explicité $K^{-1}(x)$.

c) Tracer la courbe de $K^{-1}(x)$.

d) Déterminer la primitive de K sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 2.

