

DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°1

EXERCICE : (7 Points)

1) z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7 - 4i\sqrt{2}$

a) Vérifier que $\sqrt{2} - i$ est une solution de (E) **(1point)**

b) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de 1. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique. **(2 points)**

2) Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$z = 1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \quad \textbf{(1 point)}$$

3) Déterminer l'entier naturel n pour que $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$ soit un réel. **(1 point)**

4) Linéariser : $\sin^3 2x \cos^2 x$ **(2 points)**

PROBLEME : (13 Points)

A) On considère l'équation d'inconnue complexe z ,

$$(F) : z^4 - (6+i)z^3 + (15+7i)z^2 - (18+22i)z + 8+16i = 0$$

1) Montrer que l'équation (F) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera. **(1 point)**

2) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera. **(1 point)**

3) Achever la résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (F). **(1,5 points)**

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$, $z_C = 2-2i$ et $z_D = 1$

1) Déterminer la nature du triangle ABC. Placer les points A, B, C et D dans le repère. **(1 point)**

2) Montrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon. **(1 point)**

3) Déterminer l'affixe du point E pour que ABEC soit un parallélogramme. **(1 point)**

4) Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z du plan distinct de B associe le point M'

d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-3-i}{z-2i}$

a) Calculer les affixes des points C' et D', images respectives des points C et D par f. **(1 point)**

b) Déterminer et construire les ensembles des points M dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

i) $|z'| = 1$ **(1 point)**

ii) z' est un réel **(1 point)**

iii) $\arg\left(\frac{z-3-i}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **(0,5 point)**

c) Calculer pour $z \neq 2i$ le produit $(z' - 1)(z - 2i)$. En déduire que pour tout point M distinct de B on a : $BM \times DM' = \sqrt{10}$. **(1,5 points)**

d) Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre B passant par A, alors M' appartient à un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon. Calculer OE ; Construire (C) et (C') . **(1,5 points)**

(On fera les constructions dans le même repère)