

COMPOSITION DE LA DEUXIEME PERIODE 2014 - 2015			
EPREUVE DE MATHEMATIQUES	SERIE : TSE	DUREE : 4 H	COEF : 5

EXERCICE 1 :

1°/ On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

a) Calculer U_1

b) Montrer que pour tout nombre réel positif x ; $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$. En déduire que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$ et déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2°/ Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$.

a) En écrivant $\frac{nx^n}{1+x^n} = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \times x$; montrer à l'aide d'une intégration par partie que

$$V_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

b) Sachant que pour tout nombre réel positif t , on a : $0 \leq \ln(1+t) \leq t$; montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}. \text{ En déduire que } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln 2$$

EXERCICE 2 :

Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC isocèle en A, de hauteur $[AH]$ tel que $AH = BC = 4$, (on prendra un carreau comme unité graphique).

1°/ En justifiant la construction, placer le point G barycentre du système :

$$\{(A, 2) ; (B, 1) ; (C, 1)\}.$$

2°/ On désigne par M un point quelconque de $\mathcal{P}$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{v} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ est un vecteur constant de norme 8.

b) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{v}\|$$

3°/ On considère le système de points pondérés : $\{(A, 2) ; (B, n) ; (C, n)\}$. Où n est un entier naturel fixé.

a) Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0 , G_1 et G_2

b) Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLEME :

PARTIE A/ On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ Montrer que la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f rencontre l'axe des abscisses en seul point d'abscisse α dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-1} près

3°/ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

4°/ a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la fonction : $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto x^2 e^{-x}$.

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

PARTIE B/

1°/ En désignant par f' et f'' les dérivées première et seconde de la fonction f définie dans la partie A, vérifier que pour tout nombre réel x ; $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$.

2°/ On se propose de déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + y = -2e^{-x} + 1$$

a) Montrer qu'une fonction g est solution de l'équation (E) si et seulement si, $(g - f)$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' + 2y' + y = 0$.

b) Résoudre l'équation (E') ; en déduire les solutions de (E).

c) Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

PARTIE C/ On considère les fonctions numériques φ_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$\varphi_n(x) = (-x^2 + nx + n)e^{-x}$ où n est un entier naturel.

1°/ Montrer que toutes les courbes (C_n) des fonctions φ_n passent par un point fixe I .

2°/ Montrer que la fonction φ_n admet deux extremums que l'on précisera.