
EXERCICE I (5pts)1- a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ (1pt)b) En déduire la somme : $S = 12^3 + 13^3 + 14^3 + \dots + 20^3$ (0.5pt)2- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $661x - 991y = 1$ (1pt)3- On considère les nombres A et B tels que :

$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$$

$$B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Vérifier que : $10^3 - 1 = 9 \times 111$ (0.25pt)

$$10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13 \quad (0.25pt)$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A \text{ est divisible par } 111. \quad (0.5pt)$$

. si n est impair, alors A est divisible par 7 et par 13. (0.5pt)c). si n est impair, démontrer que B est divisible par 7, 11 et 13 (0.5pt). si n est pair, déterminer le reste de la division euclidienne de B par 7 ; 11 ; 13 et 111**EXERCICE II** (5pts)1- a) Linéariser $t(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$. (1pt)b) En déduire la primitive T de la fonction t qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$. (0.5pt)

2- Soit l'équation (E) :

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0 \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

a) Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E). (0.5pt)b) Déterminer les nombres réels a et b tels que : (0.50pt)

$$(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0$$

. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l'équation (E) (1.5pt)

c) Démontrer que les images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (1pt)

PROBLEME (10pts)Le plan est rapporté à un repère ortho normal $(o, \vec{i}; \vec{j})$.

L'unité de longueur est 2 cm.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $IR - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

1-Déterminer les constantes réels a, b et c telles que :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad \text{pour tout } x \neq 1 \quad (1.5\text{pt})$$

2-Etudier les variations de f . (limites -dérivée-variations) (3.5pt)

3-Montrer que la courbe (C) représentative de f admet deux asymptotes dont l'une est la droite D d'équation $y = x - 2$ (on précisera la position de (C) par rapport à D ainsi que les coordonnées du point commun à (D) et (C)). (2pt)

4-Construire (D) et (C) . (1pt)

5-En utilisant la courbe (C) , déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de chaque équation :

$$x^3 - 4(4 + m)x^2 + 2(4 + m)x - 4 - m = 0 \quad (\text{inconnue } x) : \quad (1\text{pt})$$

Et

$$\sin^3 u - 4(4 + m)\sin^2 u + 2(4 + m)\sin u - 4 - m = 0 \quad (\text{inconnue } u) . \quad (1\text{pt})$$