

Lycée Yana Maïga de Gao (LYMG)

COMPOSITION : 2 ^{ème} PÉRIODE			
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES			
Classe : T.S.E.	2017 - 2018	Durée : 4 heures	Coef : 05

Lire attentivement :

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[5 points]

NB : Dans la partie I, $\forall n \in \mathbb{N}$; $n!$ désigne le produit $n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Ce produit s'appelle "**factorielle n**". On convient que $0! = 1$.

I. On considère la suite réelle (a_n) , définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_1 = 0 \text{ et } a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1 . (0,75 pt)

b) Prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (1 pt)

c) Montre, en utilisant une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n. \text{ (0,75 pt)}$$

2. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$. (1 pt)

3. Déduis en $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. (0,25 pt)

II. On pose $F(\alpha) = \int_0^\alpha \cos(\ln x) dx$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. A l'aide de deux intégrations par parties, calcule $F(\alpha)$. (1 pt)

2. Donne l'expression exacte de $F(e^\pi)$. (0,25 pt)

Exercice 2 : -----[5 points]

I. On considère l'équation différentielle (E): $(x+1)f'(x) + f(x) = 2e^{2x}$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1. On pose $g(x) = (x + 1)f(x)$. calcule $g'(x)$ puis déduis en les solutions de (E).

(1 pt)

2. Trouve la solution particulière h de (E) qui prend la valeur 1 en 0. (0, 25 pt)

II. Soient A, B et C trois points du plan P tels que : $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

1. Construis le triangle ABC et calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (0, 75 pt)

2. Soit G barycentre des points pondérés $(A; 2)$; $(B; 3)$; $(C; 3)$. Construis G et calcule GA . (0, 75 pt)

3. Soit f l'application de P dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f: M \mapsto 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

a. Exprime $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG . (1 pt)

b. Calcule $f(A)$ et $f(G)$. (0, 75 pt)

c. Détermine et construis l'ensemble E des points tels que : $f(M) = f(A)$. (0, 50 pt)

Problème : -----[10 points]

I. Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

1) Précise l'ensemble de définition de g . (0, 5 pt)

2) Etudie la continuité de g en 0. (1 pt)

3) a) Etudie les variations de g . (1 pt)

b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -2 ; -1[$. Détermine un encadrement de α à 10^{-2} près. (1 pt)

c) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0, 5 pt)

II. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x + \ln|x|}{x-1}$. on désigne par (C) la courbe de f dans un repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Etudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition I . (0, 5 pt)

Précise les éventuelles asymptotes de (C). (0, 5 pt)

2) a) Montre que pour tout réel x de I , on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$. (0, 5 pt)

b) Dresse le tableau de variations de f . (0, 5 pt)

c) Montre que $f(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Détermine un encadrement de $f(\alpha)$. (1 pt)

d) Montre que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point B dont l'abscisse λ appartient à l'intervalle $]0 ; 1[$. Vérifie que $0,56 \leq \lambda \leq 0,57$. (1 pt)

3) Trace (C) et ses asymptotes dans le repère. (1 pt)

4) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

Détermine une valeur approchée par excès de A par la méthode des rectangles. (1 pt)

(On partagera l'intervalle $[2 ; 3]$ en 5 intervalles de même amplitude).

Rapidité et efficacité feront la différence !!!