

Académie d'Enseignement de Bamako

Rive Droite

Composition de la 1^{ère} période 2018-2019

Série: TSE

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

Exercice 1..... (5 pts)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$.

- 1- Détermine l'ensemble de définition E de f . On désigne par M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.
- 2- Détermine l'antécédent de i .
- 3- On pose $z = x + iy$
 - a- Détermine les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de x et y .
 - b- Détermine et représente graphiquement l'ensemble des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pure.
- 4- a- Montre que le module de $f(z)$ est égal à $\sqrt{2}$ si et seulement si $4y^2 - 8xy - 1 = 0$.
 b- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $4y^2 - 8xy - 1 = 0$ en considérant y comme inconnue et x comme paramètre.
- 5- Soit la fonction U_1 restriction de $U : x \mapsto x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}$ à l'intervalle $I = [0; 1]$.
 - a- Montre que U_1 est une bijection de $[0; 1]$ sur un intervalle à préciser.
 - b- Calcule $(U_1^{-1})\left(\frac{3}{2}\right)$ sans calculer l'expression algébrique de la fonction réciproque.
 - c- Vérifie les calculs de la question précédente en calculant $(U_1^{-1})(x)$.

Exercice 2..... (5 pts)

- I. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\delta(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n .

Par exemple $D_8 \cap \mathbb{N} = \{1; 2; 4; 8\}$ donc $\delta(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

1. Calcule $\delta(n)$ pour les valeurs suivantes de n : 3; 6; 11 et 18.
2. a. Pour p entier naturel premier prouve que $\delta(p) = p + 1$.
 b. Démontre par récurrence sur α que si p est un entier naturel premier alors :

$$\delta(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}; \alpha \in \mathbb{N}^*.$$
 On remarquera que : $\delta(p^{\alpha+1}) = \delta(p^\alpha) + p^{\alpha+1}$.
 3. En déduis : $\delta(2^7); \delta(243)$ et $\delta(625)$.

II.1. Résous dans $\mathbb{N}^2$, l'équation : $x^2(y - 1) = 3$.

2. Soit λ et β deux entiers naturels et $n = 2^\lambda \times 3^\beta$. Sachant que le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n :

a. Prouve que $(\lambda - 1)(\beta - 1) = 3$.

b. En déduis les valeurs de n .

III. Une colonie de vacances compte 63 participants : les filles et les garçons s'y affrontent au cours d'une course d'orientation. L'équipe vainqueur recevra des friandises à partager équitablement entre chacun de ses membres. Pour qu'un tel partage puisse être possible, que les vainqueurs soient les filles ou les garçons, il a fallu prévoir 252 friandises.

Détermine le nombre de filles et de garçons dans cette colonie de vacances.

Problème (10 pts)

Partie A :

1. On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = x \cos x - \sin x$.

a. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations. En déduis le signe de g sur $[0, \pi]$.

b. Soit h la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $h(0) = 1$ et $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$.

Etudie les variations de h sur $[0, \pi]$.

2. a. Prouver que pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{6}x^3 \geq x - \sin x \geq 0$ (on pourra introduire la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + \sin x$, étudier ses variations et détermine son signe).

b. Prouve que h est dérivable en 0 et calcule $h'(0)$.

Partie B :

1. Etudie les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

2. Montre que $f(x) = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$. Etudie la position de la courbe (C) de f par rapport à la droite (D) d'équation $y = x + 2$.

3. Trouve le point en lequel la tangente est parallèle à (D) .

4. Trace cette tangente, la droite (D) puis la courbe (C) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5. a. Détermine graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + p$ où p est un réel.

b. Résous l'équation $f(x) = x + p$ par calcul.

c. Lorsqu'il y a deux solutions, il y a deux points d'intersection entre la droite $y = x + p$ et (C) .

Détermine l'abscisse du point I milieu de ces deux points d'intersection.