



LYMG

Lycée Yana Maïga de Gao

COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE 2018-2019

Classe : TSE

Janvier 2019

Durée : 4 heures

Coef : 05

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

Lire attentivement :

- ☛ Le sujet est composé de quatre exercices tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- ☛ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ☛ L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[4 points]

- 1) a) Vérifie que 220 et 284 sont des nombres amiables.
b) Détermine un entier p premier tel que le nombre $2^4 \times p$ soit parfait.
- 2) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N} : 2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
Dédus-en que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.
- 3) a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $8x + 5y = 100$.
b) Au 8^{ème} siècle un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie au marché. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien peut-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 2 : -----[3 points]

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on donne le point $A(12; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O; \vec{i})$ et par C un point de l'axe $(O; \vec{j})$ tels que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C .

- 1) Démontre que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E): $2x + 3y = 78$.
- 2) On se propose de trouver tous les couples de points $(B; C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
 - a) Montre que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
 - b) A partir de la définition de B et de C trouve une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E).

c) Démontre qu'un couple $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si

$(x ; y) = (12 + 3k ; 18 - 2k)$ où k est un entier relatif.

d) Combien y a-t-il de couples de points $(B ; C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$?

Exercice 3 : -----[5 points]

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{4 - x^2}$

1) Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 2 , puis interprète géométriquement le résultat.

2) Démontre les équivalences logiques suivantes :

a) $3\sqrt{x^2 - 4} + 4x < 0 \iff x \in]-\infty ; -2[;$

b) $3\sqrt{4 - x^2} - 4x \geq 0 \iff x \in \left[-2 ; \frac{6}{5}\right];$

Déduis le signe de $f'(x)$.

3) Dresse le tableau de variation de f .

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty ; -2[$.

Démontre que h^{-1} , la bijection réciproque de h , existe et déduis ses variations.

Exercice 4 : -----[8 points]

A. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z .

(E): $(1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha)$

1. Soit z une solution de (E).

a. Montre que $|1 + iz| = |1 - iz|$.

b. Déduis-en que z est réel.

2. Exprime $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

3. Pour tout $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $z = \tan \varphi$.

a. Ecris l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

b. Détermine les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

B. $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{Z}$, on pose $\alpha_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Démontre que :

$$\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]^n = 2^{-n} \sum_{h=0}^n C_n^h \alpha_h^{2k}$$

C. Calcule $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2000}$ et $i^{96} + i^{97} + i^{98} + i^{99}$.

D. Soit le polynôme de la variable complexe z telque :

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

Résous alors l'équation $P(z) = 0$

NB : A. B. C. et D. sont indépendants !

Rapidité et efficacité feront la différence !!!