

- 3) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal  $(o; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives :

$$z_A = i\sqrt{3}; \quad z_B = -i\sqrt{3}; \quad z_C = 3 - 2i\sqrt{3}; \quad z_D = \bar{z}_C.$$

- a) Placer les points  $A, B, C, D$ . [la figure complète (1,5 pts)]  
 b) Quelle est la nature du triangle  $ACD$ ? (0,5 pt)  
 c) Montrer que les points  $A, B, C, D$  appartiennent à un même cercle  $(\mathcal{C})$  dont on précisera le centre et le rayon. Donner une équation de  $(\mathcal{C})$ . (1,25 pts)  
 4) On note  $E$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $O$ .  
 Préciser l'affixe de  $E$  et déterminer la nature du triangle  $BED$ . (0,5 pt)

**Problème :** -----[11 points]

I. On considère la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$$

et  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ . (0,25 pt)  
 b) Etudier la dérivabilité de  $f$  au points  $x_0 = -2$  et  $x_1 = 1$ . (1 pt)  
 c) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation. (1,5 pts)  
 2) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de  $(C)$  avec l'axe  $(o; \vec{i})$ . (0,25 pt)  
 3) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$  et préciser les asymptotes à  $(C)$ . (1,5 pts)  
 4) Tracer  $(C)$  et ses asymptotes. (1 pt)  
 5) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty; -2]$ .  
 a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $]-\infty; -2]$  vers un intervalle  $J$  à préciser. (0,5 pt)  
 b) Soit  $h^{-1}$  la réciproque de  $h$ . Calculer  $h^{-1}(5)$  et  $(h^{-1})'(5)$ . (0,5 pt)  
 c) Pour tout  $x$  de  $J$ , exprimer  $h^{-1}(x)$ . (0,5 pt)  
 d) Construire sur le même graphique que  $(C)$  la courbe  $(\Gamma)$  de  $h^{-1}$ . (0,5 pt)

II. Soit la fonction  $g: x \mapsto x^3 - 3x - 18$ .

- 1) Dresser le tableau de variation de  $g$ . Préciser les extremums éventuels. (1 pt)  
 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique. (0,5 pt)  
 3) Calculer  $g(3)$ . En déduire le signe de  $g(x)$  suivants les valeurs de  $x$ . (0,5 pt)

III. Soit  $\varphi: x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ .

- 1) Calculer  $\varphi'(x)$  et  $\varphi''(x)$ . (0,5 pt)  
 2) Montrer que  $\forall x \in [1; 2], \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \varphi'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$ . (0,5 pt)  
 3) En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [1; 2]; \quad \frac{x+1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \frac{2x-2+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

**N.B :** Les parties I, II et III du problème sont indépendantes.

Académie d'enseignement de Bamako - Rive Gauche

| COMPOSITION : 1 <sup>ère</sup> PÉRIODE |             |                  |           |
|----------------------------------------|-------------|------------------|-----------|
| ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES               |             |                  |           |
| Classe : TSE                           | 2014 - 2015 | Durée : 4 heures | Coef : 05 |

Lire attentivement :

- ☞ Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- ☞ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ☞ L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[4 points]Dans un système de numération de base  $a$ , on considère les nombres

$$A = \overline{211}, B = \overline{312}, C = \overline{133032}.$$

- 1) Expliquer pourquoi  $a$  doit être strictement supérieur à 3. (0,25 pt)
- 2) a) Sachant que  $C = A \times B$ , montrer que  $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$ . (0,5 pt)
- b) En déduire que  $a$  divise 8. (0,25 pt)
- c) Déterminer alors  $a$ . (0,5 pt)
- 3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base quatre. (0,25 pt)
- 4) Dans cette question on suppose que  $a = 4$ . (0,75 pt)
  - a) Ecrire  $A, B$  et  $C$  dans le système décimal.
  - b) Montrer alors que  $C = A \times B = \text{ppcm}(A, B)$ .  
En déduire que l'équation :  $Ax + By = 1$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z}^2$ . (0,5 + 0,25 = 0,75 pt)
- 5) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $37x + 54y = 1$ . (0,25 pt)
  - a) Vérifier que  $(19; -13)$  est une solution de cette équation.
  - b) Résoudre cette équation dans  $\mathbb{Z}^2$ . (0,5 pt)

Exercice 2 : -----[5 points]On considère le polynôme  $f$  défini par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

- 1) Déterminer les nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$f(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$$

- 2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 0$ .

(0,5 pt)

(0,75 pt)

- b) Etudier la continuité de  $f$  en 1.
3. a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1 et en  $-1$  puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .
4. a) Démontre que :
- Pour tout  $x$  élément de  $]1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
  - Pour tout  $x$  élément de  $] -1 ; 1[$ ,  $f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .
- b) Etudier le signe de  $f'$  sur  $] -1 ; 1[$ .
5. Justifier que:  $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$  et  $-0,15 < f(\alpha) < -0,10$ .
6. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-1 ; +\infty[$ .
7. Etudier les branches infinies puis donner l'allure de  $(\mathcal{C}_f)$ .

| Compositions: 1 <sup>ère</sup> période |                 |                |
|----------------------------------------|-----------------|----------------|
| Epreuve de Mathématiques               |                 |                |
| Série : TSE                            | Durée : 4heures | Coefficient: 5 |

**Exercice 1: ..... (6 points)**

1. Soit  $\theta$  un nombre réel tel que :  $0 \leq \theta \leq \pi$ , on considère le nombre complexe  $z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$ .

- a) Ecrire le complexe  $z$  sous forme trigonométrique.  
b) Déterminer  $\theta$  pour que  $z$  et  $1 - z$  aient même module.

2. Résoudre l'équation :  $z^4 = 16i$ . En déduire les solutions de l'équation  $\left(\frac{z-2}{2}\right)^4 = i$  puis écrire ces solutions sous forme exponentielle.

3. Pour  $n \in \mathbb{C}^*$ , soit  $P_n(z) = z^3 - 6nz^2 + 12n^2z - 7n^3$ .

a) Vérifier que  $P_1(1) = 0$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$   $P_1(z) = 0$ .

b) En posant  $U = \frac{z}{n}$ , résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $P_n(z) = 0$ .

c) Soit  $T_n$  le triangle défini par les images des solutions de  $P_n(z) = 0$ .

Démontrer que  $T_1$  est équilatéral. En déduire que, pour tout  $n$ ,  $T_n$  est équilatéral.

**Exercice 2: ..... (4 points)**

1. Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$ , l'équation:  $7x - 4y = 4$ .

2. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que :

- $a = \overline{75}$  dans le système de base  $\alpha$  et  $a = \overline{49}$  dans le système de base  $t$  ;
- $b = \overline{310}$  dans le système de base  $\alpha$  et  $b = \overline{125}$  dans le système de base  $t$ .

Déterminer  $\alpha$  et  $t$ , puis  $a$  et  $b$ .

3. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On pose  $A = n + 3$  et  $B = 3n + 4$ .

a) Montrer que tout diviseur commun à  $A$  et  $B$ , est un diviseur de 5.

b) Pour quelles valeurs de  $n$  le PGCD ( le plus grand commun diviseur ) de  $A$  et  $B$  est-il égal à 5 ?

4. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls dont le PPCM est noté  $m$  et le PGCD est noté  $d$ . Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que :  $m^2 + 16d^2 = 16660$ .

**Problème:.....(10points)**

Soit  $f$  la fonction numérique la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et on désigne par } (\mathcal{C}_f) \text{ sa courbe représentative}$$

dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$ .

1. a) Etudier les variation de la fonction numérique  $g$  définie sur  $]1; +\infty[$  par

$$g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1.$$

b) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1; +\infty[$  et vérifier que  $1,28 < \alpha < 1,3$ .

c) Déterminer le signe de  $g$  sur  $]1; +\infty[$ .

2. a) Justifier que l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  est  $[-1; +\infty[$ .

II) 1) Détermine un couple d'entiers solution de l'équation (E) :  $91x + 10y = 1$

2) En déduis une solution particulière de l'équation (E') :  $91x + 10y = 412$   
Résoudre alors l'équation (E') .

3) Montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'entier  $A_n = 3^{2n} - 1$  est divisible par 8

4) Résous dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation :  $A_3x + A_2y = 3296$

### Problème

10pts

A) Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2(x+2)$  .

1) Etudie les variations de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

2) Démontre que l'équation  $g(x) = 4$  admet une unique solution  $\alpha$  dont on donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  .

3) En déduis la résolution de l'inéquation  $g(x) > 4$  .

B) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x$  et  $(C_f)$  sa

courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Etudie la parité de  $f$ .

2) Détermine  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis en déduis  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

Donne une interprète graphiquement ces résultats.

3) Demontre que la droite (D) d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$

en  $+\infty$  , en déduis l'équation d'une droite asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$  .

4) a) Demontre que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  et que  $f'(x) = \frac{\sqrt{g(x^2)} - 2}{x^2 \sqrt{x^2 + 2}}$  .

b) Déduis de la partie A que  $f'(x) > 0$  sur  $] \alpha ; +\infty[$ .

c) En déduis les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  puis sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  .

Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  .

5) Détermine une équation de la tangente (T) à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $\sqrt{2}$  .

6) Construire la courbe  $(C_f)$  .

TSE - Math - 2/2

Série : TSE

Epreuve de : Mathématiques Durée : 4 heures Coef : 5

### Exercice 1

5pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives :  $2 - 4i$  et  $-i$ . On considère la transformation  $f$  qui, à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , distinct de  $B$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  avec  $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$ .

1) Exprime les coordonnées du point  $M'(x', y')$  en fonction de celles du point  $M(x, y)$ .

2) Détermine et construis l'ensemble des points  $M$  tels que :

a)  $z'$  soit réel

b)  $z'$  soit imaginaire pur.

3) On pose  $Z = z + i$  et  $Z' = z' + i$

Vérifie que  $ZZ' = -3 + 4i$  puis calcule  $|ZZ'|$ .

4) a) Détermine l'ensemble des points  $M'$  lorsque  $M$  décrit un cercle de centre  $B$  et de rayon  $r > 0$ .

b) Détermine le réel  $r$  pour que  $M$  et  $M'$  soient sur le même cercle de centre  $B$ .

### Exercice 2

5pts

1) Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5 francs l'unité, Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à  $m_1$  francs et Fanta répond, moi je dispose aussi d'un montant égal à

$m_2$  francs. L'entier  $m_1$  s'écrit  $m_1 = 1x00y2$  dans le système de numération de base

huit et  $m_2$  s'écrit  $m_2 = x1y003$  dans le système de numération de base sept.

1) Détermine les chiffres  $x$  et  $y$  pour que chacune des deux commerçantes puisse avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2) Détermine le montant dont dispose chacune des commerçantes.

En déduis le nombre de mangues que chacune d'elle peut acheter.

TSE - Math 1/2

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE1

- 1) Soit  $(V_n)$  une suite géométrique vérifiant  $V_1 = 54$  et  $V_4 = 16$ .  
Calculer la raison  $q$  et la somme  $S_5 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$
- 2) Soit  $((U_n))$  la suite définie par 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n} \end{cases}$$
  - a) Calculer  $U_0; U_1; U_2$  et  $U_3$
  - b) Démontrer par récurrence que  $U_n > 0$
  - c) On pose  $v_n = \frac{1}{U_n}$ ; montrer que  $V_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme
  - d) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$
  - e) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

EXERCICE2

- 1) Soit  $((U_n))$  la suite définie par 
$$\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$$
 et on pose  $V_n = U_n + 6$ 
  - a) Montrer  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
  - b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$
  - c) Calculer  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$
  - d) Déterminer  $T_n = U_0 + U_1 + U_3 + \dots + U_n$
  - e) Déterminer la limite de  $S_n$  et de  $T_n$
- 2) On pose  $w_n = \ln v_n; n \in \mathbb{N}$ 
  - a) Montrer  $(W_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - b) Calculer  $A_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$
  - c) Calculer la limite de  $A_n$
  - d) Calculer le produit  $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
seront pris en compte dans l'appréciation des copies*

### Exercice 1 : ( 7 points)

#### Partie A

La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$

On note  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique 1cm).

1. Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation  $f(x) = 10$  admet une unique solution strictement positive  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
Donner une valeur décimale approchée à  $10^{-3}$  près de  $\alpha$ .
4. Tracer la courbe  $C$ .
5. Calculer l'intégrale  $I = \int_0^3 f(x) dx$ .

#### Partie B

On note  $y(t)$  la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant  $t$ ,  $t$  étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant  $t = 0$ , est  $y(0) = 10$ .

On admet que la fonction qui, à tout réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  associe  $y(t)$ , est solution de

l'équation différentielle (E) :  $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$ .

1. Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

2. On se propose de démontrer que cette fonction  $f$  est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note  $g$  une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur  $[0 ; +\infty[$  vérifiant  $g(0) = 10$ .  
Démontrer que la fonction  $g - f$  est solution, sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , de l'équation différentielle :

(E')  $y' + \frac{1}{2}y = 0$ .

- b. Résoudre l'équation différentielle (E').
- c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur  $\theta$  en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 3]$ . (On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  est le réel  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ )

Calculer la valeur exacte de  $\theta$ , puis donner la valeur approchée décimale de  $\theta$  arrondie au degré.

b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire pour  $(C_f)$  ? (0,25 pt)

2) La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ? (1 pt)

3)a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . (0,25 pt)

b) Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ . (1 pt)

c) En déduire le signe de  $f'$  sur  $]0; +\infty[$ . (0,5 pt)

d) En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ . (0,5 pt)

**Partie B :**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 1$

1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ . (0,25 pt)

2) Ecrire  $f$  sans le symbole de la valeur absolue. (1,25 pt)

3) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1 et en 3. Que peut-on conclure ? (1,25 pt)

4) Démontrer que  $f$  admet quatre (4) demi-tangentes dont on déterminera les équations. (1 pt)

5) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation. (1,25 pt)

6) Tracer la courbe  $(C)$  de  $f$  ainsi que ses quatre demi-tangentes. (1 pt)

| COMPOSITION DE LA PREMIÈRE PERIODE |                      |           |                  |           |
|------------------------------------|----------------------|-----------|------------------|-----------|
| EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES         | SERIE : SET-MTI-MTGC | 2011/2012 | DURÉE : 4 HEURES | COEF : 06 |

## Exercice 1 (4 points)

Soit  $f_{\theta}(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1 + i)(e^{i\theta} - 1)$  avec  $\theta \in [0; 2\pi]$

- 1) a) Vérifier que  $f_{\theta}(1 + i) = 0$ . (1 pt)
- b) En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $f_{\theta}(z) = 0$ . (1 pt)
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé. On considère les points  $A(1)$ ,  $B(i\sqrt{3})$  et  $M(-1 + e^{i\theta})$ .
- a) Montrer que lorsque  $\theta$  varie dans  $[0; 2\pi]$ ,  $M$  varie sur un cercle  $(C)$  dont on précisera le centre et le rayon. (1 pt)
- b) Déterminer les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles la droite  $(BM)$  est tangente au cercle  $(C)$ . (1 pt)

## Exercice 2 : (6 points)

- 1) Soit  $n$  un entier naturel, montrer que  $3^{3n+2} + 2^{n+4}$  est un multiple de 5. (1 pt)
- 2) Quels sont les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que :  $a > b$ ,  $a^2 - b^2 = 405$  et  $\text{PGCD}(a, b) = 3$ . (2 pts)
- 3) Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , la fraction  $\frac{21n+4}{14n+3}$  est irréductible. (1 pt)
- 4) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ . (1 pt)
- 5) Soit l'équation  $(E): 19x + 17y = 710$ . Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de  $(E)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ . (1 pt)

## Problème : (10 points)

Les parties A et B sont indépendantes

## Partie A :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ , et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan.

- 1) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . (0,5 pt)

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

1-Déterminer les constantes réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  telles que :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad \text{pour tout } x \neq 1 \quad (1.5\text{pt})$$

2-Etudier les variations de  $f$ . ( limites -dérivée-variations ) (3.5pt)

3-Montrer que la courbe ( C ) représentative de  $f$  admet deux asymptotes dont l'une est la droite D d'équation  $y = x - 2$  ( on précisera la position de ( C ) par rapport à D ainsi que les coordonnées du point commun à ( D ) et ( C ) ). (2pt)

4-Construire ( D ) et ( C ) . (1pt)

5-En utilisant la courbe ( C ) , déterminer suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le nombre et le signe des solutions de chaque équation :

$$x^3 - 4(4 + m)x^2 + 2(4 + m)x - 4 - m = 0 \quad (\text{inconnue } x) : \quad (1\text{pt})$$

Et

$$\sin^3 u - 4(4 + m)\sin^2 u + 2(4 + m)\sin u - 4 - m = 0 \quad (\text{inconnue } u) . \quad (1\text{pt})$$

\*\*\*\*\*

EXERCICE I ( 5pts )1- a) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$  (1pt)b) En déduire la somme :  $S = 12^3 + 13^3 + 14^3 + \dots + 20^3$  (0.5pt)2- Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $661x - 991y = 1$  (1pt)3- On considère les nombres  $A$  et  $B$  tels que :

$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$$

$$B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Vérifier que :  $10^3 - 1 = 9 \times 111$  (0.25pt)

$$10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13 \quad (0.25pt)$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A \text{ est divisible par } 111. \quad (0.5pt)$$

. si  $n$  est impair, alors  $A$  est divisible par 7 et par 13. (0.5pt)c). si  $n$  est impair, démontrer que  $B$  est divisible par 7, 11 et 13 (0.5pt). si  $n$  est pair, déterminer le reste de la division euclidienne de  $B$  par 7 ; 11 ; 13 et 111EXERCICE II ( 5pts )1- a) Linéariser  $t(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ . (1pt)b) En déduire la primitive  $T$  de la fonction  $t$  qui s'annule en  $\frac{\pi}{2}$ . (0.5pt)

2- Soit l'équation (E) :

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0 \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

a) Démontrer que si  $z_0$  est solution de (E), alors  $\overline{z_0}$  est aussi solution de (E). (0.5pt)b) Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que : (0.50pt)

$$(E) \Leftrightarrow z^2 \left[ \left( z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left( z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0$$

. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^2 + aZ + b = 0$ , puis l'équation (E) (1.5pt)

c) Démontrer que les images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (1pt)

PROBLEME ( 10pts )Le plan est rapporté à un repère ortho normal  $(o, \vec{i}; \vec{j})$ .

L'unité de longueur est 2 cm.

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $IR - \{1\}$  par :