

Composition	1 ^{er} Trimestre 2016-2017	
Epreuve	Mathématiques	
Série TSE	Durée : 4heures	Coefficient : 5

Exercice 1: (5points)

On considère l'équation (E): $z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$.

- 1) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
- 2) En déduire la solution de (E). on notera z_0 solution réelle, z_1 la solution dont la partie imaginaire est négative, et z_2 la solution dont la partie imaginaire est positive.
- 3) Soient A ; B ; C les points d'affixes respectives $z_0 ; z_1 ; z_2$.
Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 2 : (5points)

N et M sont deux nombres tels que N s'écrit $\overline{1a3a}^4$ et M s'écrit $\overline{bca35}^7$.

- 1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de $6n$ par 11.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $7x + y = 46$.
- 3) Sachant que N est divisible par 11 et que le couple (b ; c) est solution de $7x + y = 46$.

Donner les écritures en bases 4 de N et en base 7 de M.

- 4) Déterminer l'entier naturel n tel que $M^n \equiv 3[5]$.
- 5) a) Ecrire dans le système décimale M et N.
b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnues a et b

$$\begin{cases} \text{PPCM}(a; b) = M - N \\ \text{PPGCD}(a; b) = 5N + 14 \end{cases}$$

Problème : (10points)

Soit la fonction définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x| + \sqrt{x^2 - 2x}$$

1) Montrer que :

- a) $\forall x \in]-\infty; 0[; \sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x \leq 0;$
- b) $\forall x \in]2; +\infty[; \sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x \geq 0;$
- c) $\forall x \in]-\infty; 0[; x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} \leq 0;$
- d) $\forall x \in]2; +\infty[; x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0.$

2)

- a) Ecrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
- b) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$ et en $x = 2$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3) Dresser le tableau de variation de f .

4) Montrer que les droites $(\Delta): y = 2x - 1$ et $(D): y = -2x + 1$ sont des asymptotes à la courbe (C_f) de f .

5) Tracer la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$

6) a) Montrer que pour tout x de $[3; 4]$ on a : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq f'(x) \leq 1 + \sqrt{3}.$

b) En déduire que $\forall x \in [3; 4]$ on a : $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \sqrt{3} \leq f(x) \leq \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} + \sqrt{3}$

~~2~~.

7)

a) Soit $I = [2; +\infty[$ trouver $f(I)$.

b) Soit $g: I \rightarrow f(I)$

$$x \mapsto f(x)$$

Montrer que g est une bijection.

c) Calculer $(g^{-1})'(3)$.

d) Construire la courbe (Γ) de g^{-1} (où g^{-1} est la bijection réciproque de g).

8) Soit h la fonction définie par $h(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ et (C_h) sa courbe représentative.

a) Calculer $g(x - 1)$;

b) Exprimer h à l'aide de g ;