

Composition de la 1^{ère} période 2019-2020

Série : TSE

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures

coefficient : 5

Exercice 1 : (6 points)

- I. 1) Résous dans $\mathbb{N}^2$, l'équation : $7x - 4y = 4$. (1pt)
- 2) Un entier naturel a s'écrit $\overline{75}$ dans le système de base x et $\overline{49}$ dans le système de base y . Un entier naturel b s'écrit $\overline{310}$ dans le système de base x et $\overline{125}$ dans le système de base y . Détermine x et y puis a et b . (1pt)
- II. Dans cette partie on pourra utiliser le résultat suivant :
« Etant donnés deux nombres entiers naturels a et b non nuls, si $PGCD(a, b) = 1$ alors $PGCD(a^2; b^2) = 1$ ».
- Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^n p^3$. On se propose de calculer pour tout entier naturel non nul n , le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1} .
1. Démontre par récurrence que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (1 pt)
2. **Etude du cas où n est pair :**
Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$
- a) Démontre que $PGCD(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k + 1)^2 PGCD(k^2; (k + 1)^2)$. (0,5pt)
- b) Calcule $PGCD(k; k + 1)$. (0,5pt)
- c) Calcule $PGCD(S_{2k}; S_{2k+1})$. (0,5pt)
3. **Etude du cas où n est impair :**
Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k + 1$
- a) Démontre que les entiers $2k + 1$ et $2k + 3$ sont premiers entre eux. (0,5pt)
- b) Calcule $PGCD(S_{2k+1}; S_{2k+2})$. (0,5pt)
4. Déduis des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n , que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux. (0,5pt)

Exercice 2 : (4 points)

- I. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$ et B d'affixe b , tel que le triangle OAB soit équilatéral et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$. Soit Q le milieu du segment $[OB]$
1. Démontre que le point B a pour affixe $4 + 2i\sqrt{3}$. Déduis-en l'affixe q du point Q . (1pt)
2. Détermine l'affixe k du point K tel que le quadrilatère $ABQK$ soit un parallélogramme. (1pt)
3. Démontre que le rapport $\frac{k-a}{k}$ est un imaginaire pur. Déduis-en la nature du triangle OKA , puis celle du quadrilatère $OQAK$. (1 pt)

4. Soit C le point d'affixe $c = \frac{2a}{3}$. Calcule le rapport $\frac{k-b}{k-c}$. Montre que le point C est l'intersection des droites (OA) et (BK) . (1pt)

II. Résous dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

Problème : (10 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x + 2| + \frac{4}{(x-2)^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f . (0,25 pt)
b) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. (0,25pt)
- 2) a) Etudier la continuité de f au point $x_0 = -2$. (0,5pt)
b) Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = -2$ et interpréter géométriquement les résultats obtenus. (0,75pt)
- c) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f . (0,25pt)
- 3) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (0,5pt)
- 4) Montrer que : $\forall x \in]-\infty ; -2[$, $f'(x) = \frac{-x(x^2 - 6x + 12)}{(x-2)^3}$
 $\forall x \in]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x-4)(x^2 - 2x + 4)}{(x-2)^3}$ (0,5pt)
- 5) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . (1pt)
- 6) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = -x - 2$ et $y = x + 2$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5pt)
- 7) Construire (C) et ses asymptotes dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. (1 pt)
- 8) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$
a) Montrer que g est une bijection de $[4 ; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. (0,5pt)
b) Construire la courbe (C') représentative de g^{-1} dans le même repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. (0,5 pt)

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0 ; \pi]$. (0,5pt)
2. Montrer que $f'(x) = \cos x \cos 2x$ (0,5pt)
3. Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$. (1pt)
4. Trace la courbe de f sur $[0 ; \pi]$. (1pt)