

LYCEE BAMINATA COULIBALY (L.BAC)

Comité Pédagogique de Mathématiques

Année D'étude 2019 – 2020

Composition de la Première Période

Epreuve de Mathématiques

SERIE : TSE

DURÉE : 3H

COEFF : 5

- ☐ Ce Sujet est composé de deux exercices et un problème à deux parties tous obligatoires.

- ☐ Toute trace de recherche ou d'initiative raisonnable, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'attribution des points

EXERCICE 1 : (5 Points)

Consigne : Après une justification logique et soigneuse, réponds par vrai ou faux. Une affirmation non justifiée ne rapportera aucun point.

Proposition 1 : Pour tout entier positif n , $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11 **1pts**

Proposition 2 : Le 5 décembre 2095 est un mardi ! **1pts**

Proposition 3 : $(323^{1234} - 4)$ est multiple de 7 **1pts**

Proposition 4 : 13 a une infinité d'inverses modulo 9 **0.5pt**

Proposition 5 : Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors $PGDC(3n + 4, 4n + 3) = 7$ **1pts**

Proposition 6 : 4087 est un nombre premier ! **0.5pt**

EXERCICE 2 : (5 Points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 5 cm

On considère la transformation f du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = z e^{i\frac{5\pi}{6}}$

1- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f **0.5pts**

2- On définit une suite (M_n) de points du plan tels que :

$$\begin{cases} M_0(z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}) \\ M_{n+1}(z_{n+1} = z_n e^{i\frac{5\pi}{6}}) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ et } M_n(z_n) \text{ on remarquera que } M_{n+1} = f(M_n)$$

a- Place les points M_0 , M_1 et M_2 dans le plan. **1pts**

b- Démontre par récurrence que tout entier naturel n , $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$ **1pts**

3- Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$. Montre que les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n - p)$ est multiple de 12 **0.75pts**

4- On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $12x - 5y = 3$

a- Démontre que $2x \equiv 3[5]$ **0.25pt**

b- Déduis-en toutes les solutions de l'équation (E) **1pts**

c- Déduis alors l'ensemble des entiers n pour les M_n appartient à la demi-droite $[Ox)$ **0.5pt**

Seul l'effort fait les forts !

PROBLEME : **(10 Points)**

Les parties A et B sont indépendants

PARTIE A : **(6 Points)**

- 1- En utilisant l'algorithme d'Euclide, calcule $PGCD(73, 183)$ puis enduire $PPMC(73, 183)$ **1.25pts**
Soit n est un entier naturel. Un motocycliste et un voiturier doivent faire un grand nombre de tours d'une piste circulaire. Depuis le point de départ, le motocycliste prend une avance de n seconde(s) sur le voiturier. On admet que pour boucler chaque tour, il faut exactement **183 secondes** pour le motocycliste et **73 secondes** pour le voiturier. A chaque fois que les deux engins se rencontrent au point de départ, le motocycliste aura fait α tours et le voiturier en aura fait β ; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$
- 2- Pour $n = 0$, Que représente 183α et 73β ? **0.5pts**
 - a- Pour $n = 0$, déduis des questions précédentes le nombre de secondes au bout desquelles, le motocycliste et le voiturier se croiseront pour la première fois au point de départ. **0.75pts**
 - b- En déduis le nombre de tours que chacun aura fait. **0.5pts**
- 3- Explique pourquoi le couple (α, β) est solution de l'équation (E_n) : $183x - n - 73y = 0$ **0.5pts**
- 4- Dans toute la suite, $n = 12$. Détermine une couple (x_0, y_0) solution particulière de (E_{12}) **1pts**
- 5- En déduire tous les couples (α, β) . **0.5pts**
- 6- En admettant que le motocycliste a décollé à **12 Heures 07 minutes 00 seconde**, à quelle heure précise, les deux engins se croiseront au point de départ pour la deuxième fois ? **1pts**

PARTIE B : **(4 Points)**

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soient les points M, M_1, A et B les points d'affixes respectifs $z, \bar{z}, 2$ et 1

Soit l'application f de $(\mathcal{P}) - \{A\}$ dans $(\mathcal{P})$ qui à $t \ M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \frac{\bar{z}+4}{\bar{z}-2}$

- 1- Soit le point C d'affixe $2(1 + i\sqrt{3})$. Montrer que son image C' est le milieu du $[OC]$ **0.5pts**
- 2- Détermine l'ensemble des points $M(z)$ pour que le module de z' soit égale à **1**. **0.5pts**
- 3- Détermine les points invariants par f **0.75pts**
- 4- Calcule le produit $(\bar{z} - 2)(z' - 1)$ **0.5pts**
- 5- En déduire la valeur de $AM_1 \times BM'$ et une expression de l'angle $(\vec{u}, \widehat{BM'})$ en fonction de $(\vec{u}, \widehat{AM_1})$ **1pts**
- 6- **Application** : Construis l'image D' du point D d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ **0.75pts**

« La rapidité, l'extrême vigilance et l'ingéniosité seront vos meilleurs atouts . »