

Composition de la Première Période 2019-2020

Série: TSE

Etablissement : LDiré

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 Heures

Coef : 05

Exercice1 : (5points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle (7) de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice, on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α .

1) a) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\bar{\alpha}$ appartiennent au cercle (7).

2) Soit D un point du cercle (7) d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

a) Construire sur la figure le point E tel que $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D$.

b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) On admet que le point G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1) a).

c) Montrer que $\arg\left(\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = (\widehat{AF, AG}) [2\pi]$.

d) Dédurre des deux questions précédentes que le triangle AFG est équilatéral.

NB : Fait apparaître tous les points dans la figure.

Exercice2 : (5points)

1) a. Déterminer le reste de la division de $N=222333$ par 7 et par 11.

b. Déterminer deux entiers u et v tels que $7u+11v=1$.

c. En déduire le reste de la division de N par 77.

2) Toto veut faire don des livres de sa bibliothèque. Il en a plus de 10. S'il les répartit dans les cartons contenant 20 livres ou des cartons qui en contiennent 25, il lui reste toujours 7 livres. Quel est le nombre minimal de livres dans la bibliothèque de Toto ?

3) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de $A = 72^{10} \times 162^{50}$.

Problème : (10points)

Partie A : Soit f la fonction numérique définie sur $Df =]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$$

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur Df .

2) Étudier les variations de f (limite et sens de variation).

3) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1 ; 2[$.

Partie B: On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $]1 ; 2[$.

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.
- 2) On appelle g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (On a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$).
 - a) Montrer que si x est élément de $]1 ; 2[$ alors $g(x)$ est aussi élément de $]1 ; 2[$.
 - b) Justifier la dérivabilité de g sur $]0 ; +\infty[$ Calculer la dérivée de g puis montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 - c) En déduire que pour tout x de $[1, 2]$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.