

L.MAFA

COMPOSITION DE LA 1^{ère} PERIODE 2019 - 2020

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Série : TSE

Durée : 04 Heures

Coeff : 05

Exercice1 :.....
5points

I) 1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) Déterminer les entiers naturels n et p tels que $n^2 - p^2 = 28$.

II) 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation (E) : $5y + 8x = 1$.

2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant $N = 1 + 8a$ et $N = 2 + 5b$.

a) Prouver que le couple $(a ; -b)$ est solution de (E).

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 40.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation $5y + 8x = 100$.

b) A l'occasion de la fête de tabaski, un marchand de bétail a vendu tous ses taurillons et tous ses béliers faisant ainsi une recette de 1 000 000 F au total. Sur le marché, un taurillon coûtait 80 000 F et un bélier faisait 50 000 F. Sachant que le marchand avait plus de béliers que de taurillons, on demande de trouver le nombre de taurillons et celui de béliers qu'avait ce marchand pour le marché.

Exercice2 :.....
5points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $2 + 4i$ et $-i$. On considère la transformation f qui à tout M du plan d'affixe z , distinct de B , associe le point M' d'affixe z' avec $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$.

1) Exprimer les coordonnées du point $M'(x', y')$ en fonction de celles du point $M(x, y)$.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel

b) z' soit imaginaire pur.

3) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifier que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calculer $|ZZ'|$.

4) a) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$

b) Déterminer le réel r pour que M et M' soient sur le même cercle de centre B .

Problème :.....
10points

Les parties A, B et C sont liées mais la partie D est indépendante.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier la fonction g (limites et sens de variation)
- 2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α .
- 3) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B :

- 1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
- 2) Montrer que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ puis déduire le tableau de variation de f .
- 3) a) Montrer que $\forall x \in D_f ; f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$
 b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ et $+\infty$.
 c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
 4) Tracer la courbe (C) et la droite (D).

Partie C :

- 1) Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.
- 2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.

Partie D :

3) h est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$						
$h'(x)$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$				
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	3

- 1) Déterminer le domaine de définition de h .
- 2) Déterminer les équations des asymptotes.