

Composition de la 1 ^{ère} Période 2019-2020		
EPREUVE : MATHEMATIQUES SERIE : TSE DOMAINE : SMT	DUREE : 4 HEURES	COEF : 05

Exercice1 : (6pts)

- On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E): $15x - 2y = 7$
 - Justifie que le couple (1; 4) est une solution de (E).
 - Résous l'équation (E).
- Le quotient et le reste de la division d'un entiers naturel par l'entier naturel d sont respectivement 45 et r. Lorsqu'on divise ce même entier par d^2 le quotient est 6 et le reste augmente de 21.
 - Démontre que : $-2d^2 + 15d - 7 = 0$.
 - Rétablit la division euclidienne.
- Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^3 - 5x^2 + 2x + 2 \equiv 0[3]$
- Démontre que pour tout entier naturel n, $2^{4n} - 2^n$ est un multiple de 7.
- Résous dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $6x^2 - 4x + 10 = 0$

Exercice2 : (4pts)

On considère la fonction f de IR dans IR définie par : $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ x + \sqrt{2x-1} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

- Etudie la continuité et la dérivabilité de f sur IR.
- Montre que f réalise une bijection de IR sur IR
- Etablit que : $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{x}{2}} & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ x + 1 - \sqrt{2x-1} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$
- Démontre que pou tout $x \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$; on a : $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2x$. En déduire que :
 $\forall x \in \left[1; \frac{5}{2}\right]; \frac{x+1}{2x} \leq \frac{\sqrt{2x-1}}{x} \leq 1$

Problème : (10pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'afixes respectives -1 , $2i$ et $-2i$ et l'application f du plan dans le plan qui à tout point M ,différent de C, d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que :

$$Z' = \frac{-8iZ}{(Z+2i)^2}$$

- Fait une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
- Démontre les affixes des points invariants par f sont des solutions de l'équation :
 (E) : $Z[(Z+2i)^2 + 8i] = 0$
 - Détermine les racines carrées de $-8i$.
 - En déduit toutes les solutions de (E). On notera par D et E les images dans le plan des solutions non nulles de (E).
 - Montre que les points C, D et E sont alignés.
- a-) Démontre que pour tout $Z \neq -2i$; $Z' + 1 = \left(\frac{Z-2i}{Z+2i}\right)^2$

b-) En déduit que pour tout point $M \neq C$, on a : $AM' = \left(\frac{BM}{CM}\right)^2$ et que pour tous points

$M \neq B$ et $C, M' \neq A$, on a : $(\vec{u}, \widehat{AM'}) \equiv 2(\widehat{CM}, \widehat{BM})[2\pi]$

- 4) Montre que si M appartient à la médiatrice du segment $[BC]$ alors M' appartient à un cercle (C') que l'on précisera.
- 5) Montre que si M' est sur l'axe des réels privé de A alors M est sur le cercle (C) que l'on précisera.
- 6) On pose pour tout réel $\theta \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, Z = 2e^{i\theta}$
 - a) Montre que $Z' = -1 - \tan^2\left(\frac{2\theta - \pi}{4}\right)$
 - b) En déduit l'ensemble des points M' lorsque M se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2.