

LYCEE BAMINATA COULIBALY (L.BAC)

Comité Pédagogique de Mathématiques
Année D'étude 2019 – 2020

Composition du 2^e Trimestre

Epreuve de Mathématiques

SERIE : TSE

DURÉE : 4 H

COEFF : 5

- ☐ Ce Sujet est composé de deux exercices et un problème à trois parties, tous obligatoires.
- ☐ Toute trace de recherche ou d'initiative raisonnable, même incomplète sera prise en compte dans l'attribution des points.

EXERCICE 1 : (5 Points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 5 \sin x$

On a l'équation différentielle (E₀) : $y'' + 4y' + 4y = 0$

- 1- Soit θ le nombre réel de $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ définie par $\tan \theta = \frac{4}{3}$, vérifiez que $\cos \theta = \frac{3}{5}$ et en déduire la valeur de $\sin \theta$. **0.75pts**
- 2- Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sin(x - \theta)$
 - a- Montrez que φ est solution particulière de (E). **0.75pts**
 - b- Démontrez que f est solution de (E), si et seulement si $(f - \varphi)$ est solution de (E₀) **0.75pts**
- 3- On suppose qu'il existe une fonction g solution de l'équation (E₀)
On pose pour tout réel x , $h(x) = g(x)e^{2x}$
 - a- Prouvez que la dérivée seconde de h est nulle sur $\mathbb{R}$. **0.75pts**
 - b- Déduisez-en $h'(x)$ puis $h(x)$. **0.75pts**
 - c- Donnez toutes les solutions de l'équation (E₀). **0.75pts**
 - d- Résolvez l'équation (E) **0.5pts**

EXERCICE 2 : (5 Points)

A- Soit f l'application du plan (p) dans (p) rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

à $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que
$$\begin{cases} x' = \frac{-x+y\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{x\sqrt{3}+y+1}{2} \end{cases}$$

- 1- Montrez que l'ensemble des points invariants de f est une droite (D) dont on précisera le vecteur directeur $\vec{u}$ **0.5pts**
 - 2- Montrez que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à celle de $\vec{u}$ **0.5pts**
 - 3- Montrez que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D) . **0.5pts**
 - 4- Montrez que f est involutive. **0.5pts**
 - 5- Déduire la nature de f des questions précédentes et ses éléments caractéristiques. **0.5pts**
- B- Soit le point $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6- Déterminez l'expression analytique de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $k = 2$ 0.75pts

7- Soit l'application g définie par $g = f \circ h$

a- Déterminez l'expression analytique de g 0.75pts

b- Déterminez l'écriture complexe de g . 0.75pts

Quelle est la nature de g ? 0.25pts

PROBLEME : (10 Points)

On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

PARTIE A

Soit la fonction g définie $g(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$

1- Etudiez les variations de g et dressez son tableau de variation 1.5pts

2- En déduire le signe de $g(x)$ 0.25pts

3- Etudiez le signe de la fonction $u : x \mapsto 4e^{2x} - 5e^x + 1$ 0.5pts

PARTIE B

On considère la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{e^x}{2e^x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 - x + \sqrt{x} \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 et (Cf) sa courbe

1- Déterminez le domaine de définition de Df , puis déterminez les limites de f en ses bornes. 1.5pts

2- Etudiez la continuité de f en 0. 0.5pts

3- f est-elle dérivable en 0 ? Donnez une interprétation graphique du résultat. 0.75pts

4- a- Montrez que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$. 0.5pts

b- Préciser les positions relatives de (Δ) par rapport à (Cf) sur $\mathbb{R}$. 0.5pts

5- Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ puis interprétez graphiquement le résultat. 0.5pts

6- a- Pour $x \leq 0$, exprimez $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ 0.5 pts

b- Pour $x > 0$, exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ 0.5pts

7- Dressez le tableau de variation de f 0.5pts

8- Tracez la courbe (Cf) la droite (Δ) et les demi tangentes 0.5pts

9- Calculez, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (Cf) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = -\ln 4$ et $x = -\ln 8$ 0.5pts

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$

1- Montrez que h est une bijection de $[1; +\infty[$ est une bijection sur un intervalle

J à préciser. 0.25pts

2- Sans expliciter h^{-1} , donnez son sens de variation et dressez son tableau de variation. 0.25pt

3- Justifiez et tracez la courbe (Γ) de h^{-1} en pointillé 0.25pts