

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série : TSE

Durée : 04 Heures

Coeff : 05

Exercice 1 :.....6points

I-) 1) On se propose de résoudre l'équation différentielle : $(E_1) : y' - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$.

Déterminer la solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0

2) Soit f une dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.

a) Calculer $g(0)$

b) Calculer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.

c) Démontrer que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

d) En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$.

II-) 1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

a) Calculer I_1 .

b) Montrer par une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$.

c) En déduire la valeur de I_3 et I_5 .

2) Démontrer que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 :.....4points

On considère les suites u_n et v_n définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$$

1) Calculer v_0 .

2) Démontrer que v_n est une suite géométrique de raison 2.

3) Exprimer v_n en fonction de n .

4) Calculer la limite de v_n .

5) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en déduire la limite de u_n .

- 6) Pour tout entier naturel n , on pose :
- $$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} \quad \text{et} \quad T_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1}.$$
- a) Démontrer que : $S_n = (1 - 2^{n+1}) \ln 2$.
- b) Justifier que $T_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduire T_n en fonction de n .

Problème : 10points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \ln(e^x + 2e^{-x})$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1 + 2e^{-2x}) = 3x - \ln(e^{2x} + 2)$.
- 2) Calculer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- 3) a) Montrer que la droite (Δ_1) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ_1) .
- b) Montrer que la droite (Δ_2) d'équation $y = 3x - \ln 2$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. Etudier la position de (C) par rapport à (Δ_2) .

4) Etudier le sens de variation de f .

Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

5) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

6) Etudier le signe de $f(x)$ en fonction de x . Interpréter graphiquement le résultat.

7) a) Montrer que f admet une réciproque que l'on notera f^{-1} .

b) Tracer les courbe (C) et (C') de f^{-1} dans le repère.

c) Montrer que $(f^{-1})'(0) = -\frac{1+2e^{-2\alpha}}{1+6e^{-\alpha}}$.

8) Etudier le sens de variation de la fonction $h(x) = \ln(1 + 2e^{-2x})$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

9) On pose $U_n = \int_n^{n+1} h(x) dx$ ou $n \in \mathbb{N}$.

a) Donner une interprétation graphique de U_n .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h(n+1) \leq U_n \leq h(n)$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n) . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

c) Donner un encadrement de U_0 .

