

TEST DU 1^{er} TRIMESTRE MATHÉMATIQUES

Série : T.S.E

01/05/2021

Durée : 04h00

Exercice 1 : (4pts)

1°) Démontrer par récurrence que : (1pt)

a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{p=1}^n (2p-1)^3 = 2n^4 - n^2.$

b) $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

2°) Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels non nuls qui vérifient la relation : $2m + 5d = 123$ où $m = \text{PPCM}(x, y)$ et $d = \text{PGCD}(x, y)$. (1pt)

3°) On applique l'algorithme d'Euclide au couple (a, b) , la suite des quotients est : 1, 2, 1, 3, 2. Sachant que $\text{PGCD}(a, b) = 504$. Calculer a et b . (1pt)

4°) Soient u et v deux entiers relatifs vérifiant $u \equiv 4[5]$ et $v \equiv 3[5]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $7u^2 - 4v^2 + 2uv$ par 5. (0,5pt)

5°) Soit $\theta \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $Z = \frac{e^{i\theta} - i}{e^{i\theta} + i}$. Montrer que Z est imaginaire pur. (0,5pt)

Exercice 2 : (6pts)

Partie A : (4pts)

1°) Montrer que, pour tout entier relatif n , les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux. (0,5pt)

2°) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont les entiers relatifs.

a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1°, que 87 et 31 sont premiers entre eux. (0,5pt)

Montrer que le couple $(5; -14)$ est une solution de l'équation $87u + 31v = 1$. Déduire une solution (x_0, y_0) de (E). (1pt)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$. (1pt)

c) Application : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100. (1pt)

Indication : On remarquera que le point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite $(\mathcal{D})$ si et seulement si, le couple $(x, -y)$ vérifie l'équation (E).

Partie B : (2pts)

1°) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $7p - 4q = 4$. (0,5pt)

2°) Soient A et B deux entiers naturels non nuls tels que :

▪ $A = \overline{75}$ dans le système de base α et $A = \overline{49}$ dans le système de base β .

▪ $B = \overline{310}$ dans le système de base α et $B = \overline{125}$ dans le système de base β .

Déterminer α et β , puis écrire A et B dans le système décimal. (1,5pts)

Problème : (10pts)

I- Pour tout nombre complexe z , on pose : $f(z) = z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i$.

1°) a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_2 que l'on déterminera. (0,5pt)

c) Acheter la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$. (1pt)

2°) On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = i ; b = -1 + i ; c = -2 ; d = -2 - 2i \text{ et } e = -2 - i.$$

a) Placer ces cinq points dans un repère orthonormé et justifier que E est le milieu de $[CD]$. (1pt)

b) Prouver que les quatre points A, B, C, E sont sur un même cercle que l'on tracera partant du point de rencontre I des trois médiatrices de [AB] ; [BC] et [CE]. (1pt)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique 2 cm)

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$Z_A = 2 ; Z_B = 2 + 3i ; Z_C = 3i ; Z_D = -\frac{5}{2} + 3i \text{ et } Z_E = -\frac{5}{2}$$

1°) Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice. (1pt)

2°) On admet que deux rectangles sont dits semblables, lorsque le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles. Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles semblables. (0,5pt)

3°) **Etude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE.**

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme O en A et A en B. (1pt)

b) En déduire le rapport k, l'angle θ et le centre Ω de la similitude directe S. (0,5pt)

c) Démontrer que la similitude S transforme OABC en ABDE. (1pt)

4°) **Etude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED.**

a) Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte S' transformant O en B et qui laisse A invariant

est : $z' = -\frac{3}{2}i\bar{z} + 2 + 3i$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z . (1pt)

b) Montrer que S' transforme OABC en BAED. (1pt)

GOOD LUCK !!!