

Exercice 1 :(6 points)

I-) On considère l'équation différentielle : (E): $y''+2y'+2y=0$

1) Résous l'équation différentielle (E) et déduis-en la solution f de (E) telle que la tangente à la courbe (C) de la fonction f à l'origine O soit la droite d'équation $y=x$.

2) a) En observant que si g est solution de (E) alors $g = -\frac{1}{2}(2g'+g'')$, donne alors une primitive de g en fonction de g et g' .

b) Déduis-en alors une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x} \sin x$ et puis détermine l'intégrale

$$f(x) = \int_0^x e^{-t} \sin t \, dt \text{ en fonction de } x.$$

II-) ABC un triangle équilatéral tel que $AB=a$ ($a>0$).

1) Détermine puis construis l'ensemble (λ) des points M du plan tels que : $\|-\vec{MA} + 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = 2a$.

2) Détermine puis construis l'ensemble (γ) des points M du plan tels que : $-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = a^2$.

Exercice 2 :(4 points)

Une cible comprend deux parties désignées par 1 et 2. Un tireur lance une fléchette sur cette cible. Il

atteint la partie 2 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ et marque alors deux points. Il atteint la partie 1 avec la

probabilité de $\frac{2}{3}$ et marque alors un point.

1) Quelle est la probabilité pour que le tireur manque la cible ? Il ne marque alors rien.

2) Le tireur lance sa fléchette deux fois. Les deux lancers sont indépendants. Soit x la variable aléatoire qui prenant pour valeur la somme des points marqués.

a) Détermine la loi de probabilité de x .

b) Calcule l'espérance mathématique et sa variance de x .

c) Représente graphiquement la fonction de répartition de x .

Problème :(10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'unité graphique est 10cm.

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = (e^{-x^2} - 1) \ln x, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (Γ) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On se propose dans ce problème de trouver en encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$.

Partie A : On considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + e^x + 1 \text{ et } g(x) = x \ln x + e^x - 1.$$

On admet qu'il existe un réel $\alpha \in]0;1[$ tel que :
$$\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[; h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[; h(x) > 0. \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$$

- 1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- 2) Justifie que : $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = h(x)$.
- 3) a) Etudie les variations de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
b) Dresse le tableau de variation de g .
- 4) a) Démontre que $\forall x \in]0;+\infty[, l'équation g(x) = 0$ admet une solution unique β .
b) Justifie que $\beta \in]0,3;0,4[$.
- c) Démontre que :
$$\begin{cases} \forall x \in]0;\beta[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\beta;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

Partie B :

- 1) Démontre que f est continue en 0 puis justifie que f est dérivable en 0.
- 2) a) Calcules : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b) Donne une interprétation graphique des résultats des limites de la question a).
- 3) On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2)$.
b) Détermine le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$ puis dresse son tableau de variation.
- 4) a) Détermine une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 1.
b) Trace (Γ) et (T) dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Tu prendras $\beta = 0,31$.

Partie C :

- 1) Sachant que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.
a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[, -1 \leq -e^{-x} \leq -1+x$.
b) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[, 1-x \leq e^{-x} \leq 1-x + \frac{x^2}{2}$.
- 2) Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1]$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x \, dx$.
a) A l'aide d'une intégration par parties calcule $I_n(t)$.
b) Démontre que : $\forall t \in]0;1[, -I_2(t) + \frac{1}{2} I_4 \leq \int_t^1 f(x) \, dx \leq -I_2(t)$.
- 3) On pose : $S = \int_0^1 f(x) \, dx$.
a) Donne une interprétation géométrique de S .
b) On admet que : $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 f(x) \, dx = S$. Détermine un encadrement de S .

-/-