

COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE		
EPREUVE DE: MATHEMATIQUES		
Classe : TSE	Durée : 4h	Coef : 5

Exercice 1:(3pts)

- 1) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sin \theta + i(1 + \cos \theta) ; z_2 = (1 - \sqrt{5})e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ et } z_4 = -2(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{3})e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

- 2) Détermine l'ensemble des points M d'affixe
- z
- du plan tels que ;

$$a) |z - 2i| = 3 \quad b) |\bar{z} - 1 + i| = |iz + 2| \quad c) \arg(i\bar{z} + 3 + i) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi .$$

Exercice 2 :(6pts)

- 1) a) Quelle est le nombre de diviseurs positif de 240 ?
 b) Trouve les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240 .
 c) Calcule l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.
- 2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre $\frac{2n+18}{n+3}$ est-il un entier naturel ?
- 3) La division de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et reste r . Quelles sont les valeurs possibles de b et r .
- 4) L'expression d'un entier naturel n dans une base b est $\overline{1254}$. On sait de plus que l'expression de $2n$ dans la même base est $\overline{2541}$.
- a) Détermine les valeurs de b et de n en base décimale.
 b) Détermine les expressions en base b de $3n$ et $4n$.
 5) 469 est-il un nombre premier ?
 6) Démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$

Problème : (11pts)

I/1) Soit l'équation (F) : $z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8 = 0$.

- a) Vérifie que 2 est une solution de l'équation (F) .
 b) Termine la résolution de cette équation dans $\mathbb{C}$.
 On note z_1 et z_2 les autres solutions avec $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$.
 c) Montre que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.

2) on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2, \quad z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ et } z_C = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} .$$

On note le point I milieu du segment $[AB]$.

- a) Place ces points sur un dessin.
 b) Montre que le triangle OAB est isocèle en O. Que représente la droite (OI) pour l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
 c) Calcule une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et en déduis une mesure de l'angle $(\vec{U}, \vec{OI})$.
- 3) Détermine :
- a) la forme algébrique z_I .
 b) la forme trigonométrique z_I .
 c) En déduis la valeur exacte de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et de $\sin \frac{3\pi}{8}$.

TSVP  

III/ Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z , distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{3iz-7}{z-3i}$.

- 1) Recherche des points invariants par f .
 - a) Développe $(z - 7i)(z + i)$.
 - b) Montre que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin. (on pose $z' = z$)
- 2) On appelle (C) le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de (C) distinct de A et de C, soit M' son image par f .
 - a) Justifie que le point M d'affixe z vérifie : $z = 3i + 4e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
 - b) Exprime l'affixe z' du point M' en fonction de θ et en deduis que M' appartient aussi à (C).
 - c) Démontre que $z' = -\bar{z}$ et en déduis, en la justifiant, une construction géométrique du point M' .
- 3) On considère un cercle de centre A, de rayon r ($r > 0$). Détermine l'image de ce cercle par f .