

LYCEE BAMINATA COULIBALY (L.BAC)

Comité Pédagogique de Mathématiques

Année D'étude 2022 – 2023

COMPOSITON DE 2^e TRIMESTRE**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES****SERIE : TSE****DURÉE : 4H****COEFF : 5**

- Ce Sujet est composé de deux exercices et un problème, tous obligatoires.

- Toute trace de recherche ou d'initiative raisonnable, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte.

EXERCICE 1 : (4,5 Points)

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y'' - 2y' + 5y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2) : y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$$

- 1- Résous l'équation différentielle (E_1) **1pt**
- 2- Détermine le nombre réel k pour que la fonction $g(x) = k e^{-2x}$ soit solution de (E_2) **1pt**
- 3- Démontre qu'une fonction f est solution de (E_2) , si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E_1) **1pt**
- a- En déduire les solutions générales f de l'équation différentielle (E_2) **0.5pt**
- b- Détermine la solution particulière f_1 de (E_2) dont la courbe représentative (C) admet un extremum au point $A(0, 2)$ **1pts**

EXERCICE 2 : (5,5 Points)

Soit la fonction h définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1. Pour tout entier $n \geq 2$, montre que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \int_{n-1}^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n-1}$ **0.75pt**
2. a- Montre que $\int_{n-1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ **0.75pt**
 b- En déduire que $0 \leq h(n) \leq \frac{2}{n^2-1}$ **0.5pt**
3. Montre qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ **0.5pt**
4. On pose pour tout entier $n \geq 2, S_n = \frac{2}{n^2-1} + \frac{2}{(n+1)^2-1} + \frac{2}{(n+2)^2-1} + \dots + \frac{2}{(2n)^2-1}$
 a. Simplifie l'expression de S_n **0.75pt**
 b. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ **0.5pt**
- b. Déduire des résultats précédents que $0 \leq h(n) + h(n+1) + \dots + h(2n) \leq S_n$ **0.5pt**
5. Pour tout entier $n \geq 2$, On pose $U_n = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$
 a. Vérifie que : $h(n) + h(n+1) + \dots + h(2n) = U_n - \frac{1}{2} \ln\left[\frac{2(2n+1)}{n-1}\right]$ **0.75pt**
 b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ **0.5pt**
6. Déduis-en que $\forall k \in]0, +\infty[, 0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k+1}$ **0.75pt**

Seul l'effort fait les forts !

PROBLEME : **(10 Points)**

On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

PARTIE A

Soit la fonction g définie $g(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$

- 1- Etudiez les variations de g et dressez son tableau de variation **1.5pts**
- 2- En déduire le signe de $g(x)$ **0.25pts**
- 3- Etudiez le signe de la fonction $u : x \mapsto 4e^{2x} - 5e^x + 1$ **0.5pts**

PARTIE B

On considère la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{e^x}{2e^x - 1} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 - x + \sqrt{x} \ln x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
 et (Cf) sa courbe

- 1- Déterminez le domaine de définition de Df , puis déterminez les limites de f en ses bornes. **1.5pts**
- 2- Etudiez la continuité de f en 0. **0.5pts**
- 3- f est-elle dérivable en 0 ? Donnez une interprétation graphique du résultat. **0.75pts**
- 4- a- Montrez que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$. **0.5pts**
b- Préciser les positions relatives de (Δ) par rapport à (Cf) sur $\mathbb{R}$. **0.5pts**
- 5- Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ puis interprétez graphiquement le résultat. **0.5pts**
- 6- a- Pour $x \leq 0$, exprimez $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ **0.5 pts**
b- Pour $x > 0$, exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ **0.5pts**
- 7- Dressez le tableau de variation de f **0.5pts**
- 8- Tracez la courbe (Cf) la droite (Δ) et les demi tangentes **0.5pts**
- 9- Calculez, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (Cf) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = -\ln 4$ et $x = -\ln 8$ **0.5pts**

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$

- 1- Montrez que h est une bijection de $[1; +\infty[$ est une bijection sur un intervalle J à préciser. **0.25pts**
- 2- Sans expliciter h^{-1} , donnez son sens de variation et dressez son tableau de variation. **0.5pt**
- 3- Justifiez et tracez la courbe (Γ) de h^{-1} en pointillé **0.25pts**

« La rapidité, l'extrême vigilance et l'ingéniosité seront vos meilleurs atouts. »