

DUREE : 4H

TERMINALE SCIENCES EXACTES (TSE)

COEF : 4

EXERCICE 1 : (4 points)

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ Unité graphique $2cm$. On désigne par

M, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives les $z = a$; $z_1 = (1 + i)a + 2i$ et $z_2 = (1 - i)a + 2i$

- 1- a- Vérifie que $z_2 = -iz_1 - 2 + 2i$ 0,75pt
 b- En déduire que $M_2 = r(M_1)$ où r est une rotation dont on déterminera l'angle α et le centre Ω 0,75pt
- 2- On suppose que $a \neq 0$ et I milieu du segment $[M_1 M_2]$
 a- Montre que $I = t(M_1)$ où t est une translation dont on déterminera l'affixe du vecteur. 0,75pt
 b- Montre que les droites $(I\Omega)$ et $(M_1 M_2)$ sont perpendiculaires. 0,5pt
- 3- a- Montre que $\frac{z_1 - a}{z_2 - a}$ est imaginaire pure si et seulement si $|a| = 2$ 0,75pt
 b- En déduire l'ensemble des points $M(z = a)$ du plan complexe pour que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques. 0,5pt

EXERCICE 2 : (4.5 points)

- 1- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{6n} - 1$ est multiple de 7 0,75pt
- 2- $\forall n \in \mathbb{N}$; on pose $S_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$
 a- Montre que $\forall n \in \mathbb{N} ; 3^{n+1} - 2S_n = 1$ 0,5pt
 b- Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N} ; 3^n \wedge S_n = 1$ 0,5pt
 c- Détermine le reste de la division euclidienne de S_{2022} par 7 0,5pt
- 3- Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, on considère l'équation $(E) : 243x - 121y = 5$
 a- Si l'équation (E) admet des couples Solutions, détermine l'une d'entre elles notée (x_0, y_0) . 0,75pt
 b- En déduire tous les couples solutions (x, y) de (E) . 0,75pt
- 4- On suppose que le prix d'achat d'un ordinateur de bureau et celui d'un ordinateur portable sont des valeurs entières exprimées en dinars (monnaie utilisée par certains pays magrébins).
 Sachant que le prix d'achat de 243 ordinateurs avec une remise de 5 dinars équivaut au prix d'achat de 121 dinars diminué de 10 dinars et aussi, le prix d'achat d'un ordinateur de bureau est compris entre 600 dinars et 700 dinars.
 Détermine le prix d'achat d'un ordinateur de bureau et celui d'un ordinateur portable. 0,75pt

PROBLEME : (11 .5 points)

NB : Les parties A et B sont liées mais la partie C est indépendante de A et B

PARTIE A : Etude de fonctions auxiliaires : (3.5pts)

Soient les fonctions g et p définies par $g(x) = x^3 - 3x - 4$ et $p(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

- 1- a- Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation **1pt**
- b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $2 < \alpha < 3$ **0,5pt**
- c- Donne un encadrement au dixième près. **0,5pt**
- d- Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2- Etudie le signe de $p(x)$ sur $]-\infty, 0[$. **1pt**

PARTIE B : Etude de la fonction principale : **(4,5pts)**

Soit la fonction f de variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On note (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- a- Calcule les limites de f aux bornes de $\mathbb{R} - \{1\}$ **1.25pt**

- b- Etudie les branches infinies de f **0,5pt**

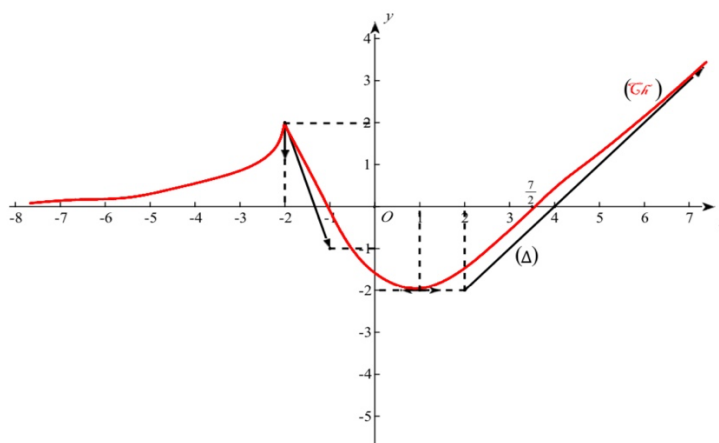
- 2- Etudie la dérivabilité de f en 0 **0,5pt**

- 3- Montre que
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f'(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{x^2+1}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
 1pt

- 4- Dresse le tableau de variation de f **0,5pt**

- 5- Trace (Cf) et toutes les droites remarquables (On prendra $\alpha = 2, 2$) **0,75pt**

PARTIE C : Etude d'un graphe : Soit (Ch) la courbe d'une fonction h dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **(3,5pts)**



- 1- Détermine les limites aux bornes de Dh puis en déduire la nature des asymptotes à la courbe (Ch) . **0,75pt**
- 2- a- Détermine le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ puis donne les valeurs exactes de ces solutions. **0,5pt**
- b- En déduire le signe de $h(x)$ sur Dh . **0,25pt**
- 3- Etudie le sens de variation de h et dresse le tableau son de variation. **0,75pt**
- 4- Détermine la valeur de : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x)-2}{x+2}$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x)-2}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)+2}{x-1}$ **0,75pt**
- 5- Etudie graphiquement le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$; $m \in \mathbb{R}$ **0,5pt**