

ACADEMIE D'ENSEIGNEMENT :	BAMAKO RIVE GAUCHE	ANNEE SCOLAIRE : 2023 -2024
ETABLISSEMENTS : LKDD	COMPOSITION DE LA 1 ^{ière} PERIODE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES	COEFFICIENT : 5
SERIE : T.S.E		DUREE : 4 heures

Ce sujet comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1 _____ (5 points)

1°) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E): $3x - 2y = 1$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montre que : $(14n + 3; 21n + 4)$ est solution de l'équation (E).

b) Dédus-en que les entiers $14n + 3$ et $21n + 4$ sont premiers entre eux.

3°) Soit $d = (2n + 1) \wedge (21n + 4)$.

a) Montre que $d = 1$ ou $d = 13$.

b) Montre que $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6[13]$.

4°) Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$ on pose :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \quad \text{et} \quad B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3.$$

a) Montre que les nombres A et B sont divisibles par $(n - 1)$ dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.

b) Détermine, suivant les valeurs de n , le plus grand commun diviseur de A et B .

EXERCICE 2 _____ (5 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(1)$ et $B(2)$. Soit un réel θ appartenant à $]0; \pi[$. On note P le point d'affixe $z_P = 1 + e^{2i\theta}$.

1°) Montre que le point P appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1.

2°) Exprime l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AP})$ en fonction de θ . Dédus-en l'ensemble (E) des points P quand θ décrit l'intervalle $]0; \pi[$.

3°) On appelle P' l'image de P par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note $z_{P'}$ l'affixe de P' .

Montre que $z_{P'} = \overline{z_P}$, puis que P' appartient au cercle (C) .

4°) Dans toute la suite on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$.

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et A' l'image de A par r .

a) Définis l'image (C') du cercle (C) par r .

b) Détermine les affixes de P et de P' image de P par r .

c) Place sur une figure $A, B, (C), P, (C')$ et P' .

d) Démontre que le triangle APQ est équilatéral.

e) Soit le point Q symétrique de P par rapport à A .

Montre que P' est le milieu de $[A'Q]$.

PROBLEME _____ (10 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x-\sqrt{x}}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On prendra 1 cm comme unité graphique.

1°) Démontre que f est continue en 0.

2°) a) Justifie que $\forall x \in]0; 1[, x < \sqrt{x}$ et $\forall x \in]1; +\infty[, x > \sqrt{x}$.

b) Calcule les limites de f en 1. Donnes-en une interprétation graphique.

3°) Calcule la limite de f en $+\infty$. Donnes-en une interprétation graphique.

4°) Etudie la dérivabilité de f à droite en 0. Donnes-en une interprétation graphique.

5°) Démontre que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x})^2}$.

6°) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

7°) Trace les droites mises en exergue par l'étude et construis (C) .

8°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0; 1[$.

a) Démontre que g est une bijection de $]0; 1[$ vers un intervalle J à préciser.

b) Calcule $g\left(\frac{1}{4}\right)$ et $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.

c) La bijection réciproque g^{-1} de g est-elle dérivable en -1 ? Si oui, calcule $(g^{-1})'(-1)$.

d) Construis (C') , courbe représentative de g^{-1} .