

Lycée Privé Bintou Konaté de Kognooumani (LPBK)Composition de la première période 2023-2024Epreuve de : Mathématiques Classe : TSE. Durée : 4h. Coeff : 4.

La présentation et la concision sont prises en compte dans la notation

Exercice 1: 6 pointsLe plan est rapporté à un repère ortho normal direct $(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2cm.Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe

$$z' = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}.$$

1°) Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprime la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et de y .2°) Avec $z' = x' + iy'$ où x' et y' des réels, vérifie que $x' = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$

3°) En déduis la nature de :

a°) l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z , tels que z' soit un réel ;b°) l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z du plan, tels que z' soit un imaginaire pur.c°) Représente (E_1) et (E_2) dans le plan.4°) On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$; $z_B = -2i$ et $z_C = 1$.a°) Montre que $|f(z)-1| \times |z-z_B| = \sqrt{5}$ b°) En déduis que les points M' d'affixe z' , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.Exercice 2: 4 points1°) Démontre que, pour tout entier naturel n , $\frac{30n+2}{12n+1}$ est irréductible ;2°) Soit l'équation (E): $943x + 989y = 46$

a°) Détermine le PGCD(943 ; 989).

b°) En déduis qu'il existe une équation (F): $41x + 43y = 2$.c°) Vérifie que $(-1; 1)$ est une solution particulière de (F).

La réussite est le fruit du « travail », du courage et de l'intelligence.

d°) En déduis une résolution de (F) dans $\mathbb{Z}^2$.

Problème : 10 points

Partie A : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2cm).

1°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (F): $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

2°) On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .

a°) Détermine le module et un argument de z_1 et z_2 .

b°) Place A et B sur la figure.

c°) Détermine les affixes des points C et T images respectives de A et B par la translation de vecteur $\vec{Q} = -2\vec{u}$.

d°) Place C et T sur la figure. Montre que ABTC est un carré.

3°) Soit S le symétrique de T par rapport à O, F l'image de T par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, E l'image de F par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.

a°) Calcule les affixes de S, F et de E. Place ces points sur la figure.

b°) Montre que $\forall k \in \mathbb{R}^*, \vec{AB} = k \vec{AE}$.

4°) On pose $\beta = 2 - \sqrt{3}$.

a°) Montre que $1 + \beta^2 = 4\beta$ et $1 - \beta^2 = 2\beta\sqrt{3}$.

b°) Exprime les affixes de Z de TS et Z' de TE en fonction de β .

c°) Montre que :
$$\begin{cases} |Z| = |Z'| \\ \frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

d°) En déduis des questions précédentes la nature du triangle TSE

Partie B : On désigne par x un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Soient les entiers naturels N et N' qui s'écrivent respectivement $100x$ et $x001$ dans le système de base $x + 1$.

1°) Ecris N et N' dans le système de base x.

2°) Ecris $N + N'$ dans le système de base $x + 1$.

En déduis que $N + N'$ est un multiple de $x + 1$.

3°) Donne, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x + 1$.

NB : Les parties A et B sont indépendantes

BONNE CHANCE !!!

La réussite est le fruit du « travail », du courage et de l'intelligence.