

Ministère de l'Education Nationale	République du Mali
Académie d'Enseignement de San	Un Peuple-Un But-Une Foi
Evaluation trimestrielle de la 2^{ème} période : 2023-2024	
SERIE : T.S.E.....	
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES	Durée : 4heures Coef: 04

Situation 1 : (Barycentre)(4 points)

Soit ABC un triangle quelconque de côtés respectifs $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. On appelle A' ; B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$; G le centre de gravité du triangle ABC.

- 1) Réalise une figure.
- 2) Calcule en fonction de a, b et c les longueurs AA'^2 ; BB'^2 ; CC'^2 (on pourra utiliser le théorème de la médiane sans justification).
- 3) Déduis-en que la somme $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
- 4) Si M est un point du plan, montre que :

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

- 5) Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant :

$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$. On choisit $a = 5$; $b = 4$; $c = 3$ construis l'ensemble (E) pour ce cas particulier.

Situation complexe : (Equations différentielles-suites numériques)(6 points)

Les autorités municipales de la ville de San envisagent de réhabiliter au CSREF de San une maternité au profit des femmes.

Consulté pour réaliser le plan l'urbaniste Ousmane Togola a prévu :

- *La réhabilitation de la salle pouvant abriter les femmes et leurs bébés.
- *La construction d'un monument ayant la forme d'un tétraèdre.
- *La construction de voies qui traverseront le domaine.

Dans le devis, l'urbaniste Togola a évalué le montant des travaux, en millions de francs de la limite de la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^n h(x)dx$ où h est une fonction numérique solution de l'équation différentielle (E): $4y'' + 4y' + y = 0$ et dont sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan admet en son point $M_0(0; 2)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La sage-femme ayant le devis a voulu avoir une idée sur le montant des travaux.

Tâches : Le travail à faire consiste à répondre aux consignes qui suivent pour trouver la réponse aux préoccupations de la sage-femme.

- 1) Résous l'équation (E) puis détermine la fonction h.
- 2) a) Calcule U_n en fonction de l'entier naturel n.
b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 8$.
c) Pour tout entier naturel n, détermine le signe de $U_{n+1} - U_n$.
d) Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et calcule sa limite.
- 3) Donne le montant exact auquel est évalué les travaux.

Situation Problème : (Etude de fonction) (10 points)

- A)** On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f. **(0,5 pt)**
b) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(0,25 pt)**
c) Déduis-en une interprétation graphique des résultats obtenus en b). **(0,25 pt)**
d) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement le résultat obtenu. **(0,25 pt)**
 - 2) a) Prouve pour tout $x \in Df$; $f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$. **(0,5 pt)**
b) Dresse le tableau de variation de f. **(0,75 pt)**
c) Trace la courbe (C). **(1 pt)**
 - 3) Soit γ un réel de $]0; 1[$. On désigne par S_γ l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \gamma$ et $x = 1$. Calcule S_γ en fonction de γ et détermine $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} S_\gamma$. **(0,75 pt)**
- B)** 1) Soient g_1 et g_2 les restrictions de f à chacun des intervalles $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$. Démontre que g_1 réalise une bijection de $]0; 1]$ vers un intervalle I que l'on précisera et que g_2 réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers l'intervalle I. **(1 pt)**
- 2) a) Soit n un entier naturel non nul, prouve que l'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans $]0; +\infty[$ exactement deux solutions notées α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$. On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n deux suites (α_n) et (β_n) . **(0,5 pt)**
b) Démontre que les suites sont convergentes et trouve leur limite. **(1 pt)**
- 3) On suppose que la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \left[f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right], & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On note (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- a) Prouve que h est continue à droite de 0. **(0,5 pt)**
 - b) Détermine le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$. **(0,5 pt)**
- 4) Soit H la primitive de h sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 0.
- a) Justifie que les fonctions $u: x \rightarrow \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$ et $v: x \rightarrow 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0; +\infty[$. **(0,5 pt)**
 - b) Prouve que pour tout $x \geq 0$; $u(x) = v(x)$. **(0,5 pt)**
 - c) Donne l'expression de H(x) pour $x \in [0; +\infty[$. **(0,5 pt)**
- 5) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par (C_h) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta_n$. Démontre que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = (2 - \frac{2}{3}e)$. **(0,75pt)**