

DUREE : 4H

TERMINALE SCIENCES EXACTES (TSE)

COEF : 4

EXERCICE 1 : (4.5 points)

A- Soit f la fonction numérique définie par : $h(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$

1- a- Détermine les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait : $h(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx}{1+x^2}$ **0.5pt**

b- En déduire $I = \int_1^2 h(x) dx$ **0.5pt**

2- En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ au moyen une intégration par parties **1pt**

B- Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

1- Détermine la solution de l'équation (F) : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0 **0.5pt**

2- Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = \ln 2$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} g(x)$

a- Calcule $g(0)$ **0.25pt**

b- Calcule $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et $g(x)$ **0.5pt**

c- Montre que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ **0.5pt**

d- En déduire l'expression de $g(x)$ et $f(x)$ telle que f soit solution de (E). **0.75pt**

EXERCICE 2 : (5 points)

A- Des scientifiques participent à un séminaire sur le thème « **Le réchauffement climatique et ses conséquences** »

Une enquête organisée par une organisation internationale a révélé que 75% des scientifiques croient que réchauffement climatique et parmi ceux-ci il y a des écologistes. Selon cette enquête :

- Parmi les scientifiques qui croient au réchauffement climatique, 60% sont des écologistes ;
- Parmi les scientifiques qui ne croient pas au réchauffement climatique 8% sont pas écologistes ;

On choisit un scientifique au hasard ayant participé au séminaire. On désigne par R l'évènement

« *le scientifique Choisi croit au rechauffement climatique* » et E l'évènement «

Le scientifique choisi est un écologiste »

1- Traduis cette situation à l'aide d'un arbre pondéré tout en mettant en évidence les probabilités suivantes : $P(R)$; $P(\bar{R})$; $P_R(\bar{E})$; $P_{\bar{R}}(\bar{E})$; $P_R(E)$ **1pt**

2- Interprète et justifie que $P(\bar{R} \cap E) = 0,23$ **0.5pt**

3- a- Justifie que la probabilité qu'un scientifique choisi au hasard est un écologiste est 0,68 **0.5pt**

b- Un Scientifique choisi au hasard est un écologiste, calcule la probabilité qu'il ne croit pas au réchauffement climatique. **0.5pt**

B- Soit le complexe $a = -1 - i$ et (Z_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} Z_0 = 0 \text{ et } Z_1 = i \\ Z_{n+1} = (1-a)Z_n + aZ_{n-1} \end{cases}$

1- Ecris Z_2 sous forme algébrique. **0.5pt**

2- Soit la suite U_n définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = Z_{n+1} - Z_n$

a- Démontre que (U_n) est une suite géométrique de raison $-a$ **0.5pt**

b- Ecris la formule explicite U_n en fonction de n . **0.25pt**

3- Pour tout entier n , On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$

a- Calcule S_n en fonction de n . **0.5pt**

b- Exprime S_n en fonction de Z_n et Z_0 . **0.5pt**

c- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = (1+i)^n - 1$ **0.25pt**

PROBLEME : ----- (10,5 points)

I- On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 1cm en abscisse et 2cm en ordonnée

1- Détermine le domaine de définition de f . **0.25pt**

a- Calcule la limite de f en $-\infty$. **0.5pt**

b- Monte que pour tout réel, $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$. En déduire la limite de f en $+\infty$. **0.75pt**

c- (Cf) admet-elle des asymptotes ? si oui précise leurs équations. **0.5pt**

2- On considère la fonction g définie par $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

a- Démontre que la fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$. **0.75pt**

b- En déduire que $\forall t \in [0, +\infty[$ le signe de $g(t) \leq 0$ **0.5pt**

3- Calcule et montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} g(e^x)$ **0.5pt**

a- En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f . **0.75pt**

b- Trace (Cf) et les asymptotes. **0.75pt**

II- Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1- Etudie le sens de variation de F **0.5pt**

2- Vérifie que pour tout t réel $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calcule $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$ **0.5pt**

a- En déduire la valeur de $F(x)$ à l'aide d'une intégration par parties. **0.5pt**

b- Vérifie que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

i- $F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2 \ln 2$. **0.25pt**

ii- $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2 \ln 2$. **0.25pt**

c- Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ **0.25pt**

d- Détermine $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x) - x]$. Donne une interprétation graphique de ce résultat. **0.5pt**

III- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2[f(1) + f(2) + \dots + f(n)] = 2 \sum_{k=0}^n e^{-k} \ln(1 + e^k)$

1- Hachure sur le graphe un domaine dont l'aire correspond à u_4 **0.5pt**

2- Détermine le sens de variation de la suite (u_n) . **0.5pt**

3- a- Justifie que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k$, on a $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ **0.5pt**

b- Comparez u_n et $F(n)$. **0.5pt**

4- La suite (u_n) est-elle convergente ? **0.5pt**