

COMPOSITION DE LA 2^{ème} PERIODEEPREUVE : de MathématiquesSérie : T.S.ECOEF : 04 DUREE : 04H**EXERCICE1**:.....I- Soit l'équation différentielle (E): $y'' - 4y = \frac{-16}{3}e^{-2x}$

- 1) Résous l'équation différentielle $E_0: y'' - 4y = 0$
- 2) Vérifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation (E).
- 3) En déduis l'ensemble des solutions de l'équation (E)
- 4) Détermine la solution particulière h vérifiant $h(0) = \frac{4}{3}$ et $h'(0) = \frac{-4}{3}$.

EXERCICE2 :.....

On considère les suites (U_n) et (V_n) et définies par : $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n)$

- 1) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_0 > 0$ et $V_0 > 0$
- 2.a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$
- b) En déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$ et que $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$
- c) En déduis que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - V_n = \frac{5}{2^n}$
- 2a) Démontre que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
- b) En déduis que les suites (U_n) et (V_n) convergentes
- c) Démontre que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite l
- 4.a) Démontre que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} \times V_{n+1} = U_n \times V_n$
- b) En déduis la valeur exacte de l

EXERCICE 3:.....

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$; $AC = 6$. Soit I le milieu de segment $[AB]$.

- 1a) Construis le barycentre $G = [(A, 5); (B, -3); (C, 2)]$.
- b) Calcule : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

2) Détermine l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$$\|5\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MA} + \vec{MB}\|.$$

3) Détermine l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24.$$

4) Détermine l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k \text{ (On discutera suivant les valeurs de } k \text{)}.$$

5) Détermine l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = -72.$$

PROBLEME:.....

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

1.) Montre que pour tout réel x positif : $f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$.

2a) Etudie la limite de f en $+\infty$.

b) Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudie la position de (C) et (D) .

3) Etudie les variations de f .

4) Trace (C) et (D) .

5) Montre que, pour tout réel α , $\alpha > 0$: $\int_0^\alpha e^{-3x} dx \leq \frac{1}{3}$.

6) Etablis que, pour tout u , $u \geq 0$: $\ln(1+u) \leq u$.

7) En déduis que, pour tout réel α , $\alpha > 0$: $\int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x}) \leq \frac{2}{3}$.

8) Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine limité par les droites d'équations $x=0$; $x=\alpha$; $y=2x$ et la courbe (C) .

En déduis des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α .

Partie B :

1) Etudie les variations de la fonction h définie dans $[2; 4]$ par : $h(x) = 2 - x + \ln x$; en déduis que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β .

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$. Montre que l'image de l'intervalle $[2; 4]$.

3) Montre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel

$$n : |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2} |u_n - \beta|.$$

- 4) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier naturel n :
- $$|u_n - \beta| \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
- 5) En déduis que (u_n) est convergente.
- 6) Détermine un entier N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$