

COMPOSITION DE LA 2^{ÈME} PÉRIODE
EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

Durée : **4Heures**

Date : **27 Mai 2024**

Situation d'évaluation N°1

(6points)

Partie A ***Barycentre : fonction vectorielle de Leibniz*** (3points)

Soit ABC un triangle rectangle en A telque $AB = 4cm$; $AC = 6cm$. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

- 1) a) Construire le barycentre $G = \{(A, 5) ; (B, -3) ; (C, 2)\}$.
b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 2) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :
$$\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = 2 \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \|$$
- 3) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan te que :
- 4)
$$\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \|$$

Partie B ***Détermination de la loi de probabilité*** (3points)

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne ;

- 1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a) Aucune boule blanches n'est tirée ;
 - b) Deux boules blanches et deux sont tirées ;
 - c) Une boule blanche au moins est tirée ;
 - d) Deux boules rouges au plus sont tirées ;
- 2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules blanches qui se trouvent parmi quatre boules tirées de l'urne maintenant .
 - a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b) Donner la loi de la probabilité de X ;
 - c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X ;
 - d) Calculer la probabilité de l'évènement : $1 \leq X \leq 2$.

Situation d'évaluation N°2**Suites numériques****(4points)**

Soit les suites U_n et V_n définies par : $\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1 - U_n} \end{cases}$ et $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n}$

- 1) Calculer V_{n+1} en fonction de U_n puis en fonction de V_n
- 2) Démontrer que V_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme V_1
- 3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
- 4) On pose $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$
 - a) Exprimer S_n en fonction de n
 - b) Calculer la somme des 30 premiers termes de la suite V_n

Situation Problème**Fonctions exponentielles****(10points)**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(5points)**Partie A : Etude de la fonction f et construction de la courbe (C) .**

- 1) Étudie la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$
(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e} xe^x$).
- 2) Démonstre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite Δ .
- 3) a) Calcule la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f .
b) Dresse le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.
c) Calcule $f'(1)$ et en déduis le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .
d) Dresse le tableau de variation de la fonction f .
- 4) Soit I l'intervalle $[1,9 ; 2]$. Démonstre que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α .
- 5) Trace la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).

Partie B : Recherche d'une approximation de α : (3points)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

- 1) Démontre, sur I , l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
- 2) Etudie le sens de variation de la fonction g sur I et Démontre que, pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I .
- 3) Démontre que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$
- 4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = g(u_n)$
 - a) Démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$
 - b) En déduis, en raisonnant par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ puis

Donne la limite de la suite u_n en $+\infty$

Partie C : Calcul d'aire : (2points)

- 1) En intégrant par parties, Calcule l'intégrale $J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$
- 2) a) Détermine, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.
b) Démontre qu'on peut écrire $A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

**BONNE CHANCE DANS LA
RIGUEUR ET DANS L'EFFORT
PERSONNEL**