

COMPOSITION DE FIN DE LA DEUXIÈME PÉRIODE

Épreuve : Mathématiques Série : TSE Coefficient : 5 Durée : 4 heures
L'épreuve comporte 2 pages. La calculatrice non programmable est autorisée

Exercice 1 **06 pts**

I) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - z^2 + 2z - 2 = 0$. (1,50)

II) On munit le plan complexe d'un repère orthonormal (O, I, J) .

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. On considère un point A appartenant à $\mathcal{C}$ et on note a son affixe, avec $a \notin \{-i\sqrt{2}; i\sqrt{2}\}$

1) On désigne par B le point d'affixe $a + \bar{a}$.
a) Vérifie que $B \in (OI)$. (0,50)

b) Détermine l'ensemble des complexes a tels que O, A et B soient alignés. (0,75)

2) Soit C le point d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.
a) Justifie que C est l'image de A par une rotation que l'on précisera. (0,50)

b) Montre que : I, C et M sont alignés $\Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z + (ia - 1)\bar{z} = i(a + \bar{a})$. (0,50)

c) Montre que : $(IC) \perp (OM) \Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z - (ia - 1)\bar{z} = 0$. (0,50)

3) Soit D d'affixe z_D le projeté orthogonal de O sur (IC) . Justifie que $z_D = \frac{i(a + \bar{a})}{2(i\bar{a} + 1)}$. (0,50)

4) Soit E le point d'affixe $z_E = \frac{a + \bar{a}}{i\bar{a} + 1}$. (0,50)

a) Justifie que E est l'image de D par une similitude que l'on déterminera.

b) Détermine l'ensemble sur lequel varie E lorsque A varie sur $\mathcal{C}$ privé des points d'affixes $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$ (0,75)

Exercice 2 **04 pts**

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_n = 2 \times 5^n + 7$

1) a) Justifie que pour tout entier naturel n , a_n est impair. (0,25)

b) Détermine suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de 5^n par 8. (0,50)

c) Déduis-en que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \equiv 1 [8]$. (0,50)

2) a) Montre que si $\begin{cases} x \equiv 1 [8] \\ x \equiv 7 [125] \end{cases}$ alors $x \equiv 257 [1000]$. (0,75)

b) Montre que : $\forall n \geq 3, a_n \equiv 257 [1000]$. (0,75)

c) Quelles sont les trois derniers chiffres de $(2 \times 5^{2023} + 7)(2 \times 5^{2024} + 7)$? (0,25)

3) a) Vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}, 5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$. (0,25)

b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1} . Montre que d est différent de 7. (0,25)

c) Trouve alors d . (0,50)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

- 1) Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$. (0,50)
- 2) a) Détermine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus. (1,00)
 b) Vérifie que pour tout réel x , $0 < f(x) < 1$. (0,50)
- 3) a) Dresse le tableau de variations de f . (0,75)
 b) Montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. (0,25)
 c) Montre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α telle que $0,5 < \alpha < 0,6$. (0,75)
 d) Détermine le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x . Interprète graphiquement le résultat. (1,00)
- 4) Trace (C_f) et la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} (unité graphique : 2cm). (1,00)
- 5) a) Montre que F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x - \ln(1 + \sqrt{1+e^{2x}})$ est une primitive de f . (0,25)
 b) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montre que $A = \alpha + \ln \left[\frac{\alpha(1 + \sqrt{2})}{\alpha + 1} \right]$. (0,75)

Partie B

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_n définie sur $[0; +\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n dt$.

- 1) a) Montre que la fonction F_n est croissante sur $[0; +\infty[$. (0,25)
 b) Montre que pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, $0 \leq [f(t)]^n \leq e^{-nt}$. (0,25)
 c) Déduis-en que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $0 \leq F_n(x) \leq \frac{1}{n}$. (0,25)
 d) Montre que la fonction F_n possède une limite finie I_n quand x tend vers $+\infty$. (0,25)
 e) Montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. (0,25)
- 2) a) En utilisant la question 5) a) de la partie A, montre que $I_1 = -F(0)$. (0,25)
 b) Montre que pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, $[f(t)]^3 - f(t) = f'(t)$. (0,25)
 c) Déduis-en que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$. (0,25)
 d) Montre que $I_3 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$. (0,25)
- 3) a) Montre que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout $n \geq 2$,

$$F_{2n+1}(x) - F_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n-1} [[f(x)]^{2n-1} - [f(0)]^{2n-1}]$$
 (0,25)
 b) Déduis-en que pour tout $n \geq 2$, $I_{2n+1} - I_{2n-1} = \frac{-1}{(2n-1)(\sqrt{2})^{2n-1}}$ (0,25)
 c) Montre que pour tout $n \geq 2$, $I_{2n+1} = I_3 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{(2k-1)(\sqrt{2})^{2k-1}}$ (0,25)
 d) Déduis-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(2k-1)(\sqrt{2})^{2k-1}}$ (0,25)