

COMPOSITION DU 1^{er} TRIMESTRE 24 - 25
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
SÉRIE : TSE DUREE : 4H

Situation ① **4 pts**

1. Les entiers naturels $\overline{34}$, $\overline{13}$, $\overline{1102}$ sont écrits dans la base a , avec $a \in \mathbb{N}$ et $a \geq 5$.

Trouve a sachant que : $\overline{34} \times \overline{13} = \overline{1102}$.

2. Soit $b \in \mathbb{N}$ s'écrivant $\overline{4P32}$ dans la base 5, avec $P \in \mathbb{N}$ et $P \geq 4$.

a) Détermine P pour que b soit divisible par 2.

b) Détermine P pour que b soit divisible par 4.

c) Détermine P pour que b soit divisible par 3.

d) Est-il possible que b soit divisible par 6.

Situation ② **6 pts**

Soit le polynôme complexe $P(x) = z^3 - (5 + i)z^2 + (a + ib)z - 8 - 16i$, où a et b sont des nombres réels non nuls.

1. Détermine a et b pour que $2i$ soit une racine de $p(z)$.

2. Pour ces valeurs de a et b trouvées, résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm, on considère les points I, J, K et A d'abscisses respectives $2i, 3 + i, 2 - 2i$ et $\sqrt{3} + i$.

a) Place les points I, J et K dans le repère. A l'aide du compas et du rapporteur construis le point A dans le repère.

b) Démontre que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

4. Soit B le point du plan tel que $Z_B = \overline{Z_A}$.

a) Calcule les distances OA, OB et AB . En déduis la nature du triangle AOB .

b) Calcule l'abscisse du point C pour que le quadrilatère $AOBC$ soit un losange.

5. Soit S la similitude directe du plan qui transforme B en C et laisse invariant le point A .

Détermine l'écriture complexe de S et précise ses éléments caractéristiques.

Situation complexe **10 pts**

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = |x - 3| - \frac{2}{|x| - 1}$.

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x| - 1 = 0$. En déduis l'ensemble de définition D_f de f .

2. Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

3. a) Etudie la continuité de f en 0 et en 3.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0 et en 3 puis donne une interprétation graphique des résultats.

4. Calcule les limites de f aux bornes de D_f

5. a) Pour $x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1; 3\}$, calcule $f'(x)$.

b) Vérifie que f' garde un signe, que tu préciseras, sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; 0[$ et sur $]3; +\infty[$.

c) Etudie le signe de la fonction $U : x \rightarrow 2 - (x - 1)^2$ sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

d) Donne la valeur exacte et une valeur approchée de $f(1 + \sqrt{2})$.

e) Dresse le tableau de variation de f .

6. a) Prouve que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 3 - x$ et $y = x - 3$ sont asymptotes obliques de la courbe (C_f) de f respectivement vers $-\infty$ et vers $+\infty$.

b) Etudie la position de la courbe (C_f) par rapport à (D_1) sur l'intervalle $]-\infty; -1[$ et par rapport à (D_2) sur l'intervalle $]3; +\infty[$.

c) Précise les autres asymptotes éventuelles de la courbe (C_f)

7. Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, trace la courbe (C_f) après avoir tracé ses asymptotes, ses demi-tangentes et sa tangente au point d'abscisse $1 + \sqrt{2}$.

8 Soit $m \in \mathbb{R}$, précise graphiquement le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = m$.