

COMPOSITION DU 1<sup>er</sup> TRIMESTRE:  
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**EXERCICE 1:** .....(7,5 points)

**Partie 1:**

1. Un nombre s'écrit  $\overline{3x53}$  en base dix. Détermine  $x$  pour que :  $5^{136} + \overline{3x53}$  soit divisible par 7. **(1pt)**
2. Deux voitures A et B partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.  
La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.  
a-) Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les deux voitures se croisent sur la ligne de départ ? **(1pt)**  
b-) Préciser le nombre de déplacement par laps de temps. **(0,5pt)**

**Partie 2:**

1. Détermine les valeurs de l'entier naturel  $n$  tels que :  $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$  est un entier naturel. **(1pt)**
2. Démontre par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$  ; **(0,75pt)**
3. Démontre que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; n(n^4 - 1)$  est multiple de 5. **(0,75pt)**
4. a) Détermine l'ensemble des diviseurs de 276. **(1pt)**  
b) Détermine deux nombres  $a$  et  $b$  tels que 
$$\begin{cases} m + 3\delta = 276 \\ 10 < \delta < 30 \end{cases} \quad \textbf{(1,5pt)}$$
où  $m = PPMC(a; b)$  et  $\delta = PGCD(a; b)$
5. Résous les équations : **(2,5pts)**  
a)  $25x - 49y = 5$  dans  $\mathbb{Z}^2$  ; b)  $\dot{2}x + \dot{3} = \dot{0}$  dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  ; c)  $5x + 21 \equiv 1[6]$  dans  $\mathbb{Z}$ .

**EXERCICE 2:** .....(4,5 points)

**I-) Soit la fonction  $f$  définie par :** 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{7-x} & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de  $f$ ; **(0,5pt)**
2. Etudie la continuité de  $f$  aux points d'abscisses  $-2$  et  $1$ . **(1pt)**

**II-) On donne les complexes suivants :**  $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$  et  $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$

1. Déterminer le module et un argument de  $z_1$  et  $z_2$ ; **(1,5pt)**
2. Écrire sous forme algébrique les complexes :  $z_1$  ;  $z_2$  ; et  $\frac{z_1}{z_2}$ . **(1,5pt)**

---

**PROBLEME :** .....(8 points)

**I-) Le plan complexe est rapporté à un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  $\forall z \in \mathbb{C}$  tel que  $z \neq 1 + 2i$**

$$f(z) = \frac{z - 3 - i}{z - 1 - 2i}$$

1. Calcule le nombre  $\beta = f(1+3i)$  puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i$  et  $z_B = 3 + i$ . Détermine et représente dans le même repère les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points M d'affixe  $z$  tel que :
  - a)  $\Gamma_1 : |f(z) - 1| = \sqrt{5}$
  - b)  $\Gamma_2 : |f(z)| = |f(z) - 1|$

**II-) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On note M le point d'affixe  $z$ .**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C} - \{-i\}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{iz}{z+i}$ .

1. Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe  $z_0$  est telle que :  $f(z_0) = 1 + 2i$
2. Soit  $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$ . On note  $r$  le module de  $z + i$  et  $\alpha$  une mesure de son argument. Exprime la forme trigonométrique de  $f(z) - i$  en fonction de  $r$  et de  $\alpha$ .
3. Soit A le point d'affixe  $-i$ .
  - a) Détermine l'ensemble  $(\mathcal{C})$  des points M vérifiant  $|f(z) - i| = \sqrt{2}$  et l'ensemble  $(\mathcal{D})$  des points M tels que  $\frac{\pi}{4}$  soit une mesure de l'argument de  $f(z) - i$ .
  - b) Montre que B appartient à  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{D})$ , construis  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{D})$ .