

Lundi, le 10 Février 2025				
Composition du Premier Trimestre				
EPREUVE DE :	CLASSE :	COEFF :	ANNEE SCOLAIRE :	DUREE :
Mathématiques	TSE	5	2024-2025	4 Heures

► L'élève traitera les exercices dans l'ordre qu'il veut. Aucun brouillon ne sera corrigé.

Exercice1 : ----- 4pts

Dans un système de numération de base a , on considère les nombres :

$$A = \overline{211} ; B = \overline{321} \text{ et } C = \overline{133032}$$

1. Explique pourquoi a doit être strictement supérieur à 3. **(0,25pt)**
2. Sachant que $C = A \times B$:
 - a. montre que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. En déduis que a divise 8. **(0,5pt)**
 - b. Détermine alors a .
- c. Ecris 214 dans la base 4. **(0,5pt)**
- d. Dans cette question on suppose que $a = 4$.
 - a. Ecris A, B et C dans le système décimal. **(0,75pt)**
 - b. Montre alors que $C = A \times B = \text{PPCM}(A;B)$. **(0,5pt)**
 - c. En déduis que l'équation : $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$. **(0,25pt)**
- e. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $37x + 54y = 1$.
 - a. Vérifier que $(19 ; -13)$ est une solution évidente de (E). **(0,25pt)**
 - b. Résous alors l'équation (E). **(1pt)**

Exercice2 : ----- 4pts

1. On divise 4373 et 826 par un même entier naturel les restes respectifs sont 8 et 7. Quel est le diviseur ? **(1pt)**
2. Détermine l'entier a pour que le nombre qui s'écrit $\overline{a2a31}$ dans le système décimal soit divisible par 11. **(0,5pt)**
3. Etudie les restes de la division euclidienne par 7 de 10^n . **(0,5pt)**
4. Trouve tous les couples d'entiers naturels a et b tels que l'on ait
$$\begin{cases} a \wedge b = 42 \\ a \vee b = 1680 \end{cases} . \text{ (1pt)}$$
5. Un général décide de compter ses soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 16 : il reste 3 soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 25 : il reste 5 soldats. Sachant que la troupe est constituée de moins de 400 soldats. Combien y a-t-il de soldats ? **(1pt)**

Exercice3 : ----- 4pts

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 6iz - 9 - 2i = 0$.

On note z_1 et z_2 ces deux solutions avec $|z_2| < |z_1|$. **(1pt)**

2. On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$ et note A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Soit Ω le milieu du segment $[AB]$. Soit f l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{3iz+9+2i}{z-3i}. \text{ On note } f(M) = M'.$$

a. Détermine l'ensemble des points invariants par f . **(0,5pt)**

b. Montre que les points A, B, M, M' sont cocycliques ou alignés. **(0,75pt)**

3. a. Montre que $(z' - 3i)(z - 3i) = 2i$ et en déduis que $\Omega M \times \Omega M' = 2$. **(0,5pt)**

b. Montre que $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M}) + (\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. **(0,5pt)**

4. Détermine le lieu géométrique du point M' à partir du lieu de M dans le cas où M décrit le cercle de centre Ω et de rayon r . **(0,75pt)**

Exercice4 : ----- 8pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère le polynôme complexe

$$f(z) = z^3 - (5 + 8i)z^2 - (13 - 32i)z + 57 - 24i.$$

1. Montre que $f(\alpha) = 0$ admet une solution réelle α . **(1,25pt)**

2. Détermine les complexes a et b tels que $f(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$. **(1pt)**

3. En déduis la résolution de l'équation $f(z) = 0$. (On notera z_A la solution réelle ; z_B la solution non imaginaire dont la partie réelle est positive et z_C la troisième solution. **(1pt)**

4. Soit A, B, C les points images respectives des solutions z_A ; z_B ; z_C de l'équation

$$f(z) = 0.$$

Place ces points dans le plan complexe. En déduis la nature du triangle ABC. **(1,25pts)**

5. Détermine les coordonnées du point I d'affixe $z = x + iy$ tel que :

$$|z - z_A| = |z - z_B| = |z - z_C|. \text{ **(1pt)**}$$

6. Détermine et construis l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ du plan $MA^2 + MB^2 = 32$.

(1pt)

7. Soit D le point d'affixe $z_D = -1 - 3i$.

a. Détermine la nature du polygone ABCD. **(0,5pt)**

b. Calcule le périmètre et l'aire du polygone ABCD. **(1pt)**

Bon travail