

COMPOSITION DU PREMIER TRIMESTRE
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SERIE :TSE

DUREE :04HEURES

COEFF :05

EXERCICE 1 : (05pts)

1) Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{|x^2 + 1| + 1}{x + 1} \quad (0,5pt) \quad ; \quad g(x) = \frac{x + 2}{x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad (0,5pt)$$

$$h(x) = x \sqrt{\frac{x + 1}{1 - x}} \quad (0,5pt) \quad ; \quad t(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 5, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 4}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (0,5pt)$$

2) Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}} \quad (0,5pt) ; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 1} - x \quad (0,5pt) ; \quad c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x} \quad (0,5pt)$$

3)a) Calcule la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur leurs ensembles de

$$\text{dérivabilités : } f(x) = \sqrt{3 + 2\cos x} \quad (0,5pt) ; \quad h(x) = \frac{(2x-1)^2}{(3x+1)^3} \quad (0,5pt)$$

$$b) \text{ Détermine les réels } a \text{ et } b \text{ pour que la fonction } f \text{ définie par } \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b, & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3}, & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

soit continue et dérivable en $x_0 = -2$. (0,5pt)

EXERCICE2 : (05pts)

I) Démontre que pour tout entier naturel non nul on a :

$$a) \sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1 ; \quad (0,75pt)$$

b) Pour tout entier naturel n , montre que $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. En déduis que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7 (0,75pt)

II) 1) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 4^n par 7 (1pt)

2) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de :

$$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2 \text{ par } 7 \quad (0,5pt)$$

c) On considère le nombre B qui s'écrit dans le système de numération à base quatre, $B = 2103211$

Détermine dans le système décimal le reste de la division du nombre B par 7. (0,5pt)

III) Deux voitures A et B démarrent en même temps d'une même ligne de départ et font plusieurs tours d'un circuit.

La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1) Détermine un autre moment (autre que le départ) où les deux voitures se croisent sur la ligne de départ. (1pt)

2) Détermine le nombre de tours effectués par chaque voiture. (0,5pt)

PROBLEME : (10pts)

SITUATION 1 :

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On donne l'équation d'inconnue complexe z ,
(E): $(1 + iz)^3(1 - itg\alpha) = (1 - iz)^3(1 + itg\alpha)$

1) Soit z une solution de (E) .

Montre que $|1 + iz| = |1 - iz|$ et en déduis que z est un réel. (0, 5pt)

2)a) Exprime $\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$. (0, 5pt)

b) Soit z un nombre réel ; on pose $z = tg\varphi$ où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

Ecris l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre (0, 5pt)

c) Détermine les solutions $z_1; z_2; z_3$ de (E) (0, 5pt)

SITUATION 2 :

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ (0, 5pt)

2)a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{4}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}$ (0, 5pt)

b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation. (0, 5pt)

3) Déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0, 25pt)

PARTIE B : Etude de la fonction principale.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ (Unité graphique : 2cm)

1)a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0, 5pt)

b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en $-\infty$. (0, 25pt)

2)a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$. (0, 5pt)

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation (0, 5pt)

3)a) Montre que (C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = 4x$ au voisinage de $+\infty$. (0, 5pt)

b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D) (0, 5pt)

4) Trace (C) et (D) (0, 5pt)

5) Justifie que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on précisera. (0, 25pt)

6)a) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. (0, 25pt)

b) Calcule $f(0)$ et en déduis la valeur de α (0, 5pt)

7) Donne les caractéristiques (ensemble de définition et sens de variation) de la bijection réciproque f^{-1} de f (0, 5pt)

8)a) Justifie que f^{-1} est dérivable en 1. (0, 25pt)

b) Détermine le nombre dérivé de f^{-1} en 1. (0, 25pt)

9) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{4x}$ (0, 5pt)

10) Représente dans le même repère que (C) la courbe représentative (C^{-1}) de f^{-1} . (0, 5pt)

BONNE CHANCE DANS LA RIGUEUR ET L'EFFORT PERSONNEL