

1^{ÈRE} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUESDurée : 4 heuresCoef : 5**Exercice 1****(5 points)**

1°/ Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes:

a) $Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$ (1pt)

b) $Z + \frac{1}{Z} = 1$ (1pt) $Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2}$ (1pt)

2°/ Soit P le polynôme de la variable complexe Z tel que :

$$P(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$$

a) Vérifier que pour tout Z non nul on a :

$$\frac{P(Z)}{Z^2} = (Z + \frac{1}{Z})^2 - (1 + \sqrt{2})(Z + \frac{1}{Z}) + \sqrt{2}$$
 (1pt)

b) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(Z) = 0$ (1pt)

Exercice 2 :

6 points

A) x est un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soient les entiers naturels N et N' qui s'écrivent respectivement $\overline{100x}$ et $\overline{x001}$ dans le système de base x + 1.

- 1) Ecrire N et N' dans le système de base x.
- 2) Ecrire $N + N'$ dans le système de base x. En déduire que $N + N'$ est multiple de x + 1. Donner alors, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par x + 1.
- 3) En déduire qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que :
 $\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q$.

B.

Dans un système de numération de base a, on considère les nombres

$$A = \overline{211}, B = \overline{312}, C = \overline{133032}.$$

- 1) Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.
- 2) a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.
 b) En déduire que a divise 8.
 c) Déterminer alors a.
- 3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base quatre.

A/ Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1-/ Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation :

2-/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que

$$2,19 < \alpha < 2,20.$$

3-/ En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

1-/ Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2-/ Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ on a : $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

3-/ Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation f .

4-/ Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au voisinage de $+\infty$.

5-/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (D).

6-/ Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).

7-/ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

FERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée: 4 heures

Coef:5

Exercice 1

(5 points)

1°/ Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes:

a) $Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$ (1pt)

b) $Z + \frac{1}{Z} = 1$ (1pt) $Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2}$ (1pt)

2°/ Soit P le polynôme de la variable complexe Z tel que:

$$P(Z) = Z^3 - (1 + \sqrt{2})Z^2 + (2 + \sqrt{2})Z - (1 + \sqrt{2})$$

a) Vérifier que pour tout Z non nul on a:

$$\frac{P(Z)}{Z^2} = \left(Z + \frac{1}{Z}\right) - (1 + \sqrt{2})\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + \sqrt{2} \quad (1pt)$$

b) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(Z) = 0$ (1pt)

Exercice 2:

6 points

A) x est un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soient les entiers naturels N et N' qui s'écrivent respectivement $100x$ et $x001$ dans le système de base $x+1$.

1) Ecrire N et N' dans le système de base x.

2) Ecrire $N+N'$ dans le système de base x. En déduire que $N+N'$ est multiple de $x+1$. Donner alors, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N+N'$ par $x+1$.

3) En déduire qu'il existe deux entiers naturels a et b tels

$$\overline{ab}_x \times \overline{aa}_x = q$$

B.

Dans un système de numération de base a, on considère les nombres

$$A = \overline{211}_a, B = \overline{312}_a, C = \overline{133032}_a.$$

1) Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.

2) a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.

b) En déduire que a divise 8.

c) Déterminer alors a.

3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base quatre.

A/ Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1-/ Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation:
- 2-/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2.19 < \alpha < 2.20$.
- 3-/ En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

- 1-/ Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2-/ Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ on a $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
- 3-/ Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f .
- 4-/ Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.
- 5-/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) et (D) .
- 6-/ Étudier la position relative de (C) par rapport à (D) .
- 7-/ Tracer la courbe (C) et (D) dans le plan muni d'un repère orthonormé.