

Lycée La Bruyère (LBRUY)

COMPOSITION DU 1^{er} TRIMESTRE 2024-2025

Classe : TSE

10 Février 2025

Durée : 4 heures

Coef : 05

EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend trois pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[4,5 points]

On considère les fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2; \quad g(x) = -3x + 2 - \frac{4}{(x-1)^2}; \quad h(x) = -x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

- Détermine l'ensemble de définition des fonctions f, g et h . (1,5 pt)
- Calcule les limites aux bornes de ces ensembles. (3 pts)

Exercice 2 : -----[4,5 points]

Les parties A, B, C et D sont indépendantes

A) Détermine le chiffre des unités du nombre $2025^{2025} - 2025$ écrit dans le système décimal. (1 pt)

B) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}; 16 \times 17^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$ est divisible par 5. (0,75 pt)

C) On donne $A = 11x^9$. Trouve x pour que l'on ait :

- A soit divisible par 8. (0,5pt)
- A soit divisible par 7. (0,5pt)
- Déduis - en qu'il existe x tel que A soit divisible par 56. (0,25pt)

D) 1) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $4x + 5y = 103$. (1 pt)

2) Les élèves d'une classe de TSE cotisent pour payer un gâteau qui coûte 5 150 FCFA. Chacun des garçons paye 250 FCFA et chacune des filles paye 200 FCFA. Détermine le nombre de garçons et de filles de cette classe sachant qu'il y a plus de garçons que de filles. De plus le nombre de filles est impair. (0,5 pt)

Problème : -----[11 points]

Les parties A et B sont indépendantes

A) Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère le point M d'affixe $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Soit f la fonction de P dans P définie par $f(z) = (iz - 2)(\bar{z} - 1)$.

- Détermine l'affixe du point C' , l'image de $C(3 - 2i)$ par f . (0,5 pt)

2. Montre que $f(z) = (-2x + y + 2) + i(x^2 + y^2 - x + 2y)$. **(0, 75 pt)**
3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 2$. **(0, 75 pt)**
4. Détermine l'ensemble (E_1) des points $M(z)$ tels que : $f(z)$ soit un réel. **(0, 75 pt)**
5. Détermine l'ensemble (E_2) des points $M(z)$ tels que : $f(z)$ soit un nombre imaginaire pur. **(0, 75 pt)**
6. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. Vérifie que les points images des solutions de $f(z) = 0$ appartiennent aux ensembles (E_1) et (E_2) . **(1, 5 pt)**
7. Soit A et B les points d'affixes respectives $-2i$ et 1 .
 - a. Exprime $[f(z)]$ en fonction de AM et BM . **(0, 25 pt)**
 - b. Donne une interprétation géométrique l'argument de $f(z)$. **(0, 25 pt)**
 - c. Détermine l'ensemble (E_3) des points $M(z)$ tels que : $f(z)$ soit un réel strictement positif. **(0, 25 pt)**
8. Construis (E_1) , (E_2) et (E_3) dans le même repère $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$. **(0, 75 pt)**

B) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 6 cm).

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe Z , associe le point M' d'affixe Z' défini par : $Z' = Ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : M_0 a pour affixe $Z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle Z_n l'affixe de M_n .

- 1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f , place les points M_0 , M_1 et M_2 . **(1, 5 pt)**
- 2) Montre que pour tout entier naturel n , on a l'égalité $Z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{n5\pi}{6})}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence). **(0, 75 pt)**
- 3) Soient n et p deux entiers naturels tels que n supérieur ou égal à p . Montre que les points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n - p)$ est multiple de 12. **(0, 75 pt)**
- 4) On considère l'équation $(E) : 12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Vérifie que le couple $(4; 9)$ est solution de (E) puis résous (E) . **(1 pt)**
 - b. Dédus-en l'ensemble des entiers naturels n tels que, M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$. **(0, 5 pt)**