

COMPOSITION DU PREMIER TRIMESTRE 2024 – 2025

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Série : TSE

Durée : 04 H

Coefficient : 04

Consigne : (Les documents et les communications sont strictement interdits, le barème est indicatif.)**Exercice 1** : (07 points)

1) Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_3 = -3(\cos x - i \sin x), \quad Z_4 = \sin 3x + i \cos 3x, \quad Z_5 = 1 - \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$$

$$Z_6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)^3 (-1 - i)^4 \quad Z_7 = \frac{-\cos 3x - i \sin 3x}{5(\sin 2x + i \cos 2x)}, \quad Z_8 = \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}$$

2) Ecris sous forme trigonométrique puis algébrique : $z_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{75}$ 3) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1. Démontre que pour

$$z_1 z_2 \neq -1 : U = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \text{ est réel et } V = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2} \text{ est imaginaire pur.}$$

4) Démontre si a et b sont deux nombres complexes alors ;

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

5) Linéarise : $\sin^3 3x \cos^2 3x$.6) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le nombre complexe $z_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ Détermine l'entier naturel n pour que z_{10}^n soit un réel.**Exercice 2** (05,5 points)A) La notation $a \wedge b$ désigne le PGCD de a et b.1. Etablis que pour tout $(a, b, q) \in \mathbb{Z}^3, a \wedge b = (b \wedge a - bq)$ 2. Montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}, (5n^3 - n \wedge n + 2) = (n + 2 \wedge 38)$ 3. Détermine l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n + 2)$ divise $(5n^3 - n)$.

4. Quelles sont les valeurs possibles du $(5n^3 - n \wedge n + 2)$?

5. Détermine l'ensemble des entiers n tels que $(5n^3 - n \wedge n + 2) = 19$

B) 1) a) Détermine suivant les valeurs de n , les restes de la division de 5^n par 7.

b) En déduire le reste de la division euclidienne de 5^{136} par 7.

2) Un nombre s'écrit $3x53$ en base 10, détermine x pour que l'on ait

$$5^{136} + 3x53 \equiv 0[7]$$

3) Détermine l'ensemble des couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que $m - 16d = 1977$ avec

$m = \text{PPCM}(a ; b)$ et $d = \text{PGCD}(a ; b)$.

Problème : (07,5points)

A. On considère l'équation d'inconnue Z , (F): $Z^3 + (-1 - i)Z^2 + 2(1 + 3i)Z + 8 = 0$.

1) Montre que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure Z_0 que l'on déterminera.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (F).

B. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0 ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = -1 + i$

1) a) Place les points A, B et C.

b) Détermine l'affixe z_D du point D pour que ADBC soit un parallélogramme, place le point D.

2) On pose $Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

a) Ecris Z sous forme algébrique. En déduis la nature du triangle ABC.

b) Détermine l'affixe z_E du point E milieu de $[AB]$. Place le point E.

c) Montre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3) Détermine et construis les ensembles des points $M(z)$ tels que :

$$a) |z + 1 - i| = |\bar{z} - 2 - 2i| \quad ; \quad b) |(1 - i)z - 2 - 2i| = 2\sqrt{2}$$

$$c) \arg\left(\frac{z+1-i}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi ; (k \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad d) |z + i| = 2|z - 2i|$$