

$$b) f(x) = (3x^2 + 2x - 4) - 4$$

Académie d'Enseignement de Bamako rive droite			République du Mali		
*****			Un Peuple-Un But-Une Foi		
*****LYCEE PRIVEE FAT*****					
COMPOSITION DE MATHEMATIQUES					
EPREUVE DE : Mathématiques	CLASSE : TSE	COEFF : 04	ANNEE SCOLAIRE : 2025-2026	DUREE : 04 heures	DATE : 02/02/2025

Situation 1 : (4 points)

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe Z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par : $f(z) = Z + \frac{1}{z}$.

On note M le point d'affixe Z et M' le point d'affixe $f(Z)$.

- On appelle A le d'affixe $a = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$
 - Détermine la forme exponentielle de a . (0,5pt)
 - Détermine la forme algébrique de $f(a)$. (0,5pt)
- Résous dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(Z) = 1$ (1pt)
- Soit M un point d'affixe Z du cercle (C) de centre O et de rayon 1
 - Justifie que l'affixe Z peut s'écrire sous forme $Z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel (0,5pt)
 - Montre que $f(Z)$ est un nombre réel (0,5pt)
- Décris et représente l'ensemble des points M' d'affixe tels que $f(Z)$ soit un nombre réel (1pt)

Situation 2 : (5 points)

Partie A : On considère l'équation $(E): 15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

- Justifie, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tels que $15u - 26v = 1$. Trouve un tel couple (1pt)
- En déduis une solution particulière $(x_0; k_0)$ de l'équation (E) (0,5pt)
- Montre que $(x; k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$ (0,5pt)
- Montre que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x; k)$ d'entiers relatifs tels que $\begin{cases} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{cases}$ où $q \in \mathbb{Z}$ (0,5pt)

Partie B :

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme m'indique le tableau ci-dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

- À chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant.
- On associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26
- On associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P!

- 1) Code le mot MATHS. (0,75pt)
- 2) Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.
 - a) Montre alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x - 26k = y - 7$ (0,25pt)
 - b) En déduis que $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$ (0,5pt)
 - c) En déduis une description du système de décodage associé au système de codage considéré. (0,25pt)
- 3) Explique pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodé par la lettre B. Décode le mot WHL (0,75pt)
- 4) Montre que, par ce système de codage, deux lettres différentes codées par deux lettres différentes. (0,25pt)

Problème : (11 points)

- I- Soit f la fonction définie sur $D =]-\infty; 2] \cup [0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Etudie la dérivabilité de f à gauche en -2 et à droite en 0. Interprète les résultats trouvés. (2pts)
- 2) a) Calcule $f'(x)$ pour tout réel x de $D \setminus \{-2; 0\}$ et vérifie que $f'(x) < 0$ pour $x < -2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$ (1,5pt)
 - b) Dresse le tableau de variation de f . (1pt)
- 3) Montre que la droite Δ d'équation $y = -2x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ (1pt)
- 4) Trace (Δ) et (C) (1pt)
- 5) Soit (C') le symétrique (C) par rapport au point $I(-1; 0)$
 - a) Montre que tous points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ on a : $M' = S_I(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = -y \end{cases}$ (0,5pt)

b) Soit g la fonction qui admet pour représentation graphique la courbe (C) . Montre que g est définie sur D par : $g(x) = -x - 2 - \sqrt{x^2 + 2x}$ (0,75pt)

II- On considère la fonction f définie par : $h(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- 1) Quel est le domaine de définition de h . vérifie que h est 2π périodique (1pt)
- 2) Compare $f(\pi - x)$ et (x) . Que dire sur (Γ) ? (0,75pt)
- 3) Étudie les variations de h sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, puis détermine la limite de h en $-\frac{\pi}{2}$ (1,25pt)