

Exercice 1

Dérive les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

2) $f(x) = \sqrt{-x+3}$

Calcul de dérivées

GOUVERNORAT du district de Bamako

République du Mali

Un Peuple – Un But – Une Foi

Académie d'Enseignement Bamako RD.

Lycée public de Niamakoro (L.NIAMA)**COMPOSITION DU PREMIER TRIMESTRE
2024-2025****Epreuve de Mathématiques**

Classe : TSE	10 Février 2025	Durée : 4 heures	Coef : 05
--------------	-----------------	------------------	-----------

Lis attentivement :

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'élève traitera les exercices dans l'ordre de son choix et aucun brouillon ne sera corrigé.
- L'usage de la calculatrice programmable, les téléphones et, les tablettes est formellement interdit.

Situation 1 : -----[5 points]

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ unité graphique 2cm on note $M(z)$; $A(4)$ et $B(4i)$. Soit $\theta \in [0; 2\pi]$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on considère le point $E(re^{i\theta})$ et le point F tel que OEF soit un triangle rectangle isocèle vérifiant $(\vec{OE}; \vec{OF}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

- Détermine en fonction de r et θ l'affixe z_F de F . (0,5pt)
- Fais une figure et la complète au fur et à mesure de l'exercice. On choisira uniquement pour cette figure $\theta = \frac{5\pi}{6}$ rad et $r = 3$. (0,75pt)
- On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments $[AB], [BE], [EF], [FA]$.
 - Prouve que $PQRS$ est un parallélogramme. (0,75pt)
 - On pose $Z = \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$, détermine le module et un argument de Z . Dédus-en que $PQRS$ est un carré. (0,75pt)
- Calcule en fonction de r et θ les affixes respectives des points P et Q . (0,5pt)
 - Quelle est en fonction de r et θ l'aire du carré $PQRS$? (0,75pt)
 - r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est maximale? Quelle est alors l'affixe de E ? (1pt)

Situation 2 : -----[5 points]

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = \frac{1}{m-6} \end{cases}$$

Détermine la valeur de m pour que f soit continue au point $x_0 = 2$. (1pt)

2) Soit g définie par :
$$g(x) = \begin{cases} ax^2 - x + b & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{2b}{x+3} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Détermine les réels a et b pour que g soit continue et dérivable au point $x_0 = -2$. (1pt)3) Etudie la continuité et la dérivabilité de chacune des fonctions au point x_0 donné.

a) $\begin{cases} P(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} & \text{et } x_0 = 1 \\ P(1) = 2 \end{cases}$ (1,5pt) b) $\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{2\cos 2x + 1} & \text{et } x_0 = \frac{\pi}{3} \\ h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$ (1,5pt)

~ Comité Pédagogique de Mathématique ~

Situation complexe :

[10 points]

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

[4,5 points]

- I. un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 30m et 21m, deux autres côté mesurent 18m et 12m. Pour la clôture le propriétaire a besoin de poteau de support à égale distance mesurée en nombre minimum de poteau avec un poteau à chaque sommet.
 - a. Quelle est la distance entre deux poteaux ? (1pt)
 - b. Détermine le nombre de poteaux nécessaire à la clôture. (1pt)
- II. Démonstration par récurrence
 - 1) Démontre par récurrence la relation :
$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \quad (0,5\text{pt})$$
Déduis-en la limite de S_n quand n augmente indéfiniment. (0,5pt)
 - 2) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ (0,5pt)
Déduis-en la somme $S = 10^3 + 11^3 + \dots + 20^3$ (0,5pt)
 - 3) On pose $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}; I_n = \sqrt{2 + I_{n-1}}$
Démontre que $I_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. (0,5pt)

Partie B :

[5 points]

Partie I :

1. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A est le point d'affixe 1 ; B le point d'affixe $2i$ et C le point d'affixe z .
 - a. Que représente géométriquement : $\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right|$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$ (0,5pt)
 - b. Dans la suite, on suppose que le point C d'affixe z est défini par : $CB = \sqrt{\frac{2}{5}} BA$ et $(\vec{BA}; \vec{BC}) = \alpha$ où $\alpha \in]-\pi; 0]$ et $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Calcule $\sin \alpha$ (0,25pt)
 - c. Démontre que $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. Déduis-en le nombre complexe z et vérifie que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure. (1pt)
2. z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E): $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$
 - a. Vérifie que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E). (0,25pt)
 - b. Détermine sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. Déduis-en dans l'ensemble des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique. (1pt)

Partie II :

- 1) θ est un réel quelconque, on considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $E(\theta): z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$.
Résous dans $\mathbb{C}$ les équations $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (0,5pt)
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d'affixes $z_A = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_B = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_C = \bar{z}_B$ et $z_D = \bar{z}_A$.
Détermine les formes algébriques des affixes des points A, B, C et D puis les place dans le repère. (1pt)
- 3) Détermine la nature du quadrilatère ABCD et celle du triangle ABD (0,5pt)