

Composition du 1^{er} Trimestre

Epreuve de Mathématiques

DUREE : 4H

TERMINALE SCIENCES EXACTES (TSE)

COEF : 4

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en comptes dans l'appréciation des copies.

Exercice1 :(5pts)

Soit $f_{\theta}(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1 + i)(e^{i\theta} - 1)$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$

1-a) Vérifier que $f_{\theta}(1 + i) = 0$ (1 pt)

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_{\theta}(z) = 0$ (1 pt)

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. on considère les points $A(-1)$; $B(i\sqrt{3})$ et $M(-1 + e^{i\theta})$

a) Montrer que lorsque θ varie dans $[0 ; 2\pi]$; M varie sur un cercle (c) dont précisera le centre et le rayon. (1 pt)

b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle (c) .

3°) On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de côtés :132m ;156m et 204m, de telle sorte qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés :

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètres ? (1 pt)

Exercice 2 :(5pts)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 8 : \begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$$

1. Montre par récurrence que les points $M_n(x_n; y_n)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est : $(\Delta) : 5x - y + 3 = 0$

En déduire que : $x_{n+1} = 4x_n + 2$

2. Montre par récurrence que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n aussi sont des entiers naturels.
3. Montre que :
 - a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est aussi divisible par 3.
 - b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers eux.
4. a) Montre par récurrence que : $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$
 b) En déduire que : $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n

Problème :(10 pts)

A// Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé (unité graphique 1cm)

- 1°) Détermine les réels a ; b ; c tel que $f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}$
- 2°) Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f puis les limites de f
- 3°) Montre que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calcule sa dérivée.
- 4°) Dresse le tableau de variation de f
- 5°) Montre que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une droite $(\mathcal{D})$ asymptote que l'on déterminera
- 6°) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à son asymptote $(\mathcal{D})$
- 7°) Montre que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie dont on calculera les coordonnées
- 8°) Donner l'équation de la tangente (r) à $(\mathcal{C})$ au point $x_0 = 0$
- 9°) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{D}_f$
 Donne une valeur approchée de $\mathcal{L}$ à 10^{-2} près par excès
- 10°) Trace $(\mathcal{D})$; (r) et la courbe $(\mathcal{C})$ de f .

B// On pourra dans cette partie utiliser certains résultats de la partie A.

On considère la fonction g définie sur $\mathfrak{N}$ par $g(x) = \frac{3(\sin x - 1)^3}{3\sin^2 x + 1}$

- 1°) Montre que g est dérivable sur $\mathfrak{N}$ et calcule $g'(x)$
- 2°) Dresse le tableau de variation de g sur $[-\pi; \pi]$
- 3°) Trace sur un nouveau dessin, la courbe représentative de g .

« Le cerveau n'est un ventre qui engloutit et qui digère mais un monde qui s'enrichit de ses propres efforts »

CORRECTION :

Exercice 1 :

Soit $f_{\theta}(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1 + i)(e^{i\theta} - 1)$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$

1-a) Vérifions que $f_{\theta}(1 + i) = 0$ **1pt**

$$f_{\theta}(1 + i) = (1 + i)^2 - (i + e^{i\theta})(1 + i) + (1 + i)(e^{i\theta} - 1) = (1 + i)[1 + i - i - e^{i\theta} + e^{i\theta} - 1] = (1 + i)(0) = 0$$

b) Dédudisons-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_{\theta}(z) = 0$ (**1 pt**)

$$S = \{1 + i; -1 + e^{i\theta}\}$$

2- $A(-1)$; $B(i\sqrt{3})$ et $M(-1 + e^{i\theta})$

a) Montrons que lorsque θ varie dans $[0 ; 2\pi]$; M varie sur un cercle (c) dont précisera le centre et le rayon. (1 pt)

Soit $\Omega(-1)$; $\Omega M = |-1 + e^{i\theta} + 1| = |e^{i\theta}| = 1$, M décrit un cercle de centre $\Omega(-1)$; $\forall \theta \in [0; 2\pi]$ et de rayon $r = 1$

Autre méthode : $M(-1 + \cos\theta ; \sin\theta)$

$$\begin{cases} x = -1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

b) Déterminons les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle (c).

$$(BM) \perp (\Omega M) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 + \cos\theta \\ \sin\theta - \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 + \cos\theta + 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 1 \Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \theta = 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

3°) On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de côtés : 132m ; 156m et 204m, de telle sorte qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés :

Le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètres

Déterminons le plus grand commun diviseur de 132 ; 156 et 204 i.e

$$PGCD(132; 156; 204) = 12 \text{ et } N = \frac{132+156+204}{12} = 11 + 13 + 17 = 41$$

Arbres et 12 mètres entre deux arbres 1pt

Exercice 2 :

1. Initialisation : $5 \times 1 - 8 + 3 = 0$, Soit $5x_0 - y_0 + 3 = 0$, donc $M_0 \in (\Delta)$

Hérédité : Supposons que pour n naturel, on ait $M_n \in (\Delta)$, c'est-à-dire que $5x_n - y_n + 3 = 0$

$$\text{Calculons } 5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 5\left(\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1\right) - \left(\frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5\right) + 3 =$$

$$x_n\left(\frac{35}{3} - \frac{20}{3}\right) + y_n\left(\frac{5}{3} - \frac{8}{3}\right) + 3 = 5x_n - y_n + 3 = 0$$

La relation est vraie au rang 0 et, si elle est vraie au rang n , elle est vraie au rang $(n+1)$: On a démontré par le principe de récurrence que quel que soit le naturel n , $5x_n - y_n + 3 = 0$ c'est-à-dire que tous les points $M_n \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_{n+1} = \frac{56}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 8 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \Rightarrow$$

(Par différence) $8x_{n+1} - y_{n+1} = 12x_n + 3$ On a $y_{n+1} = 5x_{n+1} + 3$, donc

$$8x_{n+1} - 5x_{n+1} - 3 = 12x_n + 3 \Leftrightarrow 3x_{n+1} = 12x_n + 6 \text{ et enfin en simplifiant par 3 :}$$

$$x_{n+1} = 4x_n + 2$$

2. **Initialisation** : x_0 et y_0 sont des naturels.

Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel p tel que x_p et y_p soient des naturels

$x_p \in \mathbb{N} \Rightarrow 4x_p \in \mathbb{N} \Rightarrow 4x_p + 2 \in \mathbb{N}$, soit $x_{p+1} \in \mathbb{N}$. On a donc démontré par récurrence que tous les termes x_n sont des naturels. $x_n \in \mathbb{N} \Rightarrow 5x_n \in \mathbb{N} \Rightarrow 5x_n + 3 \in \mathbb{N}$, soit $y_n \in \mathbb{N}$

3. Montrons que

a. $\forall n \in \mathbb{N}, 5x_n = y_n - 3$;

Si y_n est multiple de 3, $y_n - 3$ l'est aussi, donc $5x_n$ est multiple de 3 et. Comme 5 est premier avec 3, x_n est divisible par 3.

Si x_n est multiple de 3. $y_n = 5x_n + 3$ L'est aussi, soit y_n est divisible par 3.

b. Supposons que x_n et y_n aient un diviseur commun différent de 3 ; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_n = kd$ et $l \in \mathbb{Z}$ tel que $y_n = ld$ Or $y_n = 5x_n + 3 \Leftrightarrow ld = 5kd + 3 \Leftrightarrow (l - 5k)d = 3$

Égalité qui montre que d divise 3 qui n'a pour diviseur commun que 1 et 3 ; c'est impossible puisque x_n et x_n ne sont pas divisibles par 3.

x_n et y_n Sont premiers entre eux.

4.a. **Initiation** : $\frac{1}{3}(4^0 \times 5 - 2) = \frac{1}{3} \times 3 = 1 = x_0$

Hérédité : Supposons que pour n naturel, on ait $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$

On a $x_{n+1} = 4x_n + 2 = 4 \times \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2) + 2 = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 2 \times 4) + 2 =$

$\frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 2 \times 4) + \frac{1}{3} \times 6 = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 8 + 6) = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 2)$: La relation est donc vraie au rang n+1. La relation est vraie au rang 0 et, si elle vraie au rang n, elle l'est au rang n+1 : donc d'après le principe de récurrence :

Quel que soit l'entier n, $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$

b. D'après la question précédente x_n étant un entier $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3 car $3x_n = 4^n \times 5 - 2$

Problème :

A// $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$

1. Déterminons les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}$

$f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1} = x - 3 + \frac{8x}{3x^2+1}$ $a = 1$ $b = -3$ et $c = 8$

2. Déterminons l'ensemble de définition de f puis les limites aux bornes :

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{3x^2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Possibilité d'asymptote oblique

3. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculons sa dérivée

f est définie sur $\mathbb{R}$, car $3x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ f est dérivable sur D_f , on obtient ainsi

$f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1} \Leftrightarrow f'(x) = 9 \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}$

4. Dressons le tableau de variation de f.

Un carré étant toujours positif ou nul on en déduit $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, elle est continue et $f(-1) = -6$ et $f(1) = 0$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	$-\infty$	-6	0	$+\infty$

5. Montrons que la courbe (C) de f admet une droite (D) asymptote que l'on déterminera

On peut écrire $f(x) = x - 3 + \frac{8x}{3x^2+1}$ on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 3 + \frac{8x}{3x^2+1} - (x - 3) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{3x^2+1} = 0$ la droite d'équation $y = x - 3$ est A.O à (C) au voisinage de $\pm\infty$

6. Etudions la position relative de (C) par rapport à son asymptote (D).

On a $f(x) - y = \frac{8x}{3x^2+1}$ comme $3x^2 + 1$ est toujours positif alors $f(x) - y$ est du signe de $8x$

$\forall x < 0, f(x) < y$ Alors la courbe (C) est en dessous de la droite (D) $\forall x \in]-\infty; 0[$

$\forall x > 0; f(x) > y$ Alors la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) $\forall x \in]0; +\infty[$

La courbe (C) et la droite (D) se coupent pour $x = 0$.

7. Montre que (C) admet un centre de symétrie dont on calculera les coordonnées.

Considérons le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$ soit $M\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ dans $(I; \vec{i}, \vec{j})$ la relation

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ Permet d'écrire $x = X$ et $y = Y - 3$

$$y = f(x) \Rightarrow y = x - 3 + \frac{8x}{3x^2+1}; Y - 3 = X - 3 + \frac{8X}{3X^2+1} \Leftrightarrow Y = X + \frac{8X}{3X^2+1}$$

Dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$ $F(X) = X + \frac{8X}{3X^2+1}$; $\forall X \in \mathbb{R}; F(-X) = -X - \frac{8X}{3(-X)^2+1} = -F(X)$ alors F est impaire et l'origine I du repère est considéré comme de symétrie :

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = X - 3 \end{cases} \Rightarrow I \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \end{smallmatrix} \right)$$

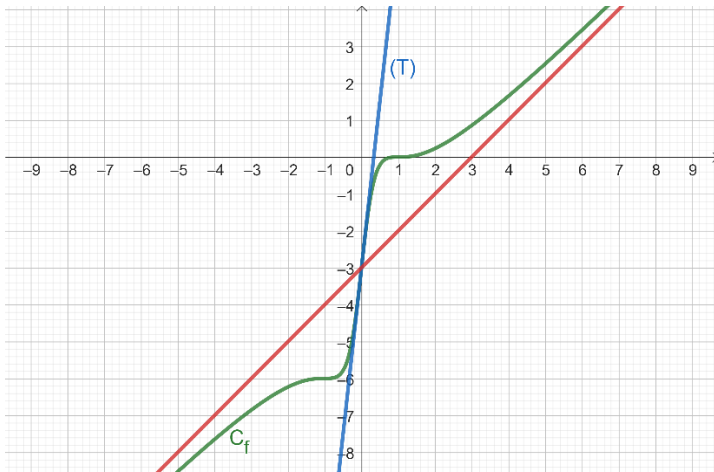
8. Déterminons l'équation de la tangente à (C) au point $x = 0$

$$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad f'(0) = 9 \text{ et } f(0) = -3 \Rightarrow y = 9x - 3$$

9°) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{D}_f$

D'après le T.V de f $\forall x \in]-\infty; 1] f(x) \in]-\infty; 0]$ l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans $]-\infty; 1]$, $\forall x \in [1; +\infty[; f(x) \in [0; +\infty[$ et de plus f est continue et croissante sur $[1; +\infty[$ comme $1 \in [0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 1$ donc une admet une solution unique dans $[1; +\infty[$ l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$ on peut donner

une valeur approchée de α , $f(3) < 1$ et $f(4) > 1$. $\alpha \in [3; 4]$ $\alpha = 3.20$ à 10^{-2} près par excès.



10. Traçons la courbe, l'asymptote et la tangente

$$B// g(x) = \frac{3(\sin x - 1)^3}{3\sin^2 x + 1} = f(\sin x)$$

1. g est la composée de la fonction f et de la fonction sinus qui sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$(v'ou)' = u'(v'ou)$ On peut écrire $g'(x) = (\sin x)' \times f'(\sin x)$ donc

$$g'(x) = \cos x \frac{(\sin x - 1)^2 (\sin x + 1)^2}{(3\sin^2 x + 1)^2}$$

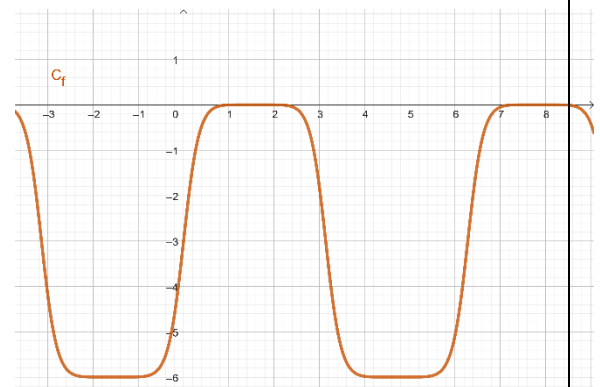
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$; $f'(\sin x) \geq 0$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ donc $f'(\sin x)$ s'annule lorsque $\sin x = 1$ ou $\sin x = -1$ et $\cos x = 0$

$g'(x) = (\cos x)f'(\sin x)$ $g'(x)$ Est du signe de $\cos x$; g sur $[-\pi; \pi]$

$$g(-\pi) = f(\sin(-\pi)) = f(0) = -3 \quad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(-1) = -6$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(1) = 0 \quad g(\pi) = f(\sin(\pi)) = -3$$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	-	0	+	-
$g(x)$	-3	-6	0	-3



3. A partir du T.V $y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$ tangentes horizontales

$g(x + 2\pi) = g(x)$ Périodique de période 2π on peut donc compléter la courbe par des translations de vecteur $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$