

Composition de la 1^{ère} Période Année Scolaire 2024 – 2025

Epreuve de : Mathématiques Séries : TSE Coefficient : 05 Durée 04h

Exercice1 : -----[5 pts]

Dans l'ensemble des nombres complexes on considère l'équation :

$$(F): z^4 - 2z^3(1 + \sqrt{3}) + 2z^2(3 + 2\sqrt{3}) - 4z(2 + \sqrt{3}) + 8 = 0$$

1-/ Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de (F) alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$ (c'est-à-dire $\overline{z_0}$ est aussi une solution de (F)). 0,5pt

2-/ Vérifier que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation de l'équation (F).

En déduire une seconde solution z_1 de l'équation. 1pt

3-/ Déterminer les deux autres solutions de z_2 et z_3 de l'équation (F) 1pt

4-/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

a-/ Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de (F) 0,5pt

b-/ Déterminer la nature du quadrilatère obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface. 1pt

Exercice2 : -----[5pts]

On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

1-/ a-/ Calculer u^2 et u^4 1,5pt

b-/ Calculer le module et un argument de u^4 en déduire le module et un argument de u 1,5pt

2-/ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées du plan, on associe son affixe $Z = x + iy$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que le module du produit $u \times Z$ égal à 8 2pts

Problème : -----[10pts]

Les parties A ,B, C, D et E sont indépendantes

Partie A :

Le même entier naturel N s'écrit $\overline{abcca}$ dans la base 5 et $\overline{bbab}$ dans la base 8.

1- Montrez que $309a + 15c = 226b$ 0,75pt

2- En déduire que $b \equiv 0[3]$ puis en déduire la valeur de b . 0,75pt

3- Montrez que $3a \equiv 1[5]$ puis en déduire les valeurs de a et c . 0,75pt

4- Ecrivez N dans le système décimal 0,75pt

Partie B :

1-/Déterminer les entiers naturels p sachant que la décomposition de p en produit de facteurs premiers ne contient que les nombres **2 et 3**. En plus p admet exactement 10 diviseurs positifs. 1pt

2-/Précisez les 10 diviseurs de p . Sachant que $p = 3^4 \times 2$ 0,5pt

Partie C :

Soit $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on ne vous apprend rien en écrivant $b^2 - 1 = (b - 1)(b + 1)$

1-/Montrez que b^2 et $b - 1$ sont premiers entre eux. 0,75pt

2-/Résolvez dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation d'inconnues (x, y) : $b^2x + (b - 1)y = 1$ 0,75pt

Partie D :

Déterminez les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $8m = 223d + 30$ avec

$m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$ mais $d > 10$ 1,5pt

Partie E :

Un astronome a observé le jour j , le corps céleste **A**, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($j + 6$), il observe un corps **B** dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle **j1**, le jour de la prochaine apparition simultanée de **A** et **B** aux yeux de l'astronome. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par les corps **A** et **B** entre les jours j et **j1**.

1- / Expliquez pourquoi (u, v) est solution de l'équation (**E1**) : $35x - 27y = 2$ 0,5pt

2- / Déduisez-en une solution particulière dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (**E1**) 1pt

3- / Déterminez toutes les solutions de l'équation (**E1**) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 1pt

4- / Déduisez-en les valeurs de u, v puis de **j1 - j** 1pt

5- / On admet que **j1 - j = 735 jours**.

j1 étant le Samedi 25 décembre 2004, quelle sera la date exacte du jour **j**? 0,5p