

Composition de la première période 2024-2025			
Epreuve de Mathématiques			
(LSABABU) /AE-RD	SERIE : TSE	Durée : 4 heures	Coefficient : 5

Exercice 1 :(6pts)

La partie I et II sont indépendantes

I. Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points

A, B, C et D d'affixe respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $b = 1 + \sqrt{2} + i$; $c = \bar{b}$ et $d = 2i$

1) Ecris le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

2) a) Vérifie que $b - d = c$

b) Montre que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ et déduire que les points $A; B$ et D sont alignés.

3) Vérifie que $ac = 2b$. Déduis-en que $2arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

4) Soit R la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' .

a) Montre que $z' = \frac{1}{2}az$

b) Déduis-en que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

II. A tout nombre complexe z , on associe le nombre $z' = \frac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1}$.

1) Montre que z' est bien définie pour tout nombre complexe z .

2) a) Démontre que z' est réel si et seulement si on a : $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 4i$.

b) Déduis-en z' est réel si et seulement si, il existe un réel x non nul tel que $z = x + \frac{i}{x}$

3) Démontre que z' est un imaginaire pur si, et seulement si, il existe un réel x tel que $z = x + ix$ où

$z = x - ix$. Déduis-en l'ensemble E_1 des points $M(x; y)$ tels que z' soit un réel et l'ensemble E_2 des points $M(x; y)$ tels que z' soit un imaginaire pur.

Exercice 2 :(5pts)

I. 1) a) Vérifie que $2024 \equiv 1[7]$; Déduis-en le reste de la division euclidienne de -2024 par 7.

b) Montre que $2024^{2023} - 1$ est divisible par 7.

2) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(E): 3x + 4y = 7$ ou x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifie que $(1; 1)$ est une solution de (E) .

b) Montre que si $(x; y)$ est une solution de (E) alors $x \equiv 1[4]$.

c) Déduis-en l'ensemble des solutions de (E) .

3) Soit $(a; b)$ est une solution de (E) et $d = PGCD(a; b)$. Montre que les valeurs possibles de d sont 1 et 7

4) Soit $n = 4 \times 2024^{2023} + 1$.

a) Détermine le reste de la division euclidienne de n par 7.

b) Détermine alors, le $PGCD(4 \times 2024^{2023} + 1 ; 1 - 3 \times 2024^{2023})$.

5) a) Montre que pour tout entier naturel n de chiffre d'unité u , il existe un entier a tel que $n = 10a + u$.

b) Montre que n est divisible par 7 si et seulement si $a + 5u$ est divisible par 7.

c) Déduis-en un algorithme qui justifie la divisibilité de 14161 par 7.

II. Démontre que pour tout entier naturel n , $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Problème :(9pts)

La partie A et B sont indépendantes

A) On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par : $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Détermine l'ensemble de définition de f .

2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interprète le résultat graphiquement.

3) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Etudie la position relative de (C) et (Δ) sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

4) a) Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = 2$ à droite et $x_0 = 0$ à gauche et interpréter les résultats graphiquement.

b) Calcule $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$ et étudie son signe puis dresse le tableau de variation de f .

5) a) Détermine l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b) Trace (C) .

6) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [2 ; +\infty[$.

a) Montre que h admet une fonction réciproque h^{-1} et détermine $D_{h^{-1}}$.

b) Trace la courbe (C') de h^{-1} .

B) Soit g la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $g(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

1) a) Etudie les variations de g .

b) Montre que pour $x \in [2 ; 3]$, $2 \leq g(x) \leq 3$.

c) Montre que pour tout $x \in [2 ; 3]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

d) Déduis-en que $|g(x) - 3| \leq \frac{1}{4}|x - 2|$

2) Montre que l'équation $g(x) = x$, admet une solution unique α tel que $\alpha \in]2 ; 3[$.