

Exercice 1 :

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elles sont exactes ou fausses et donner une preuve démontrée de la réponse choisie.

Proposition 1 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un réel.

Proposition 2 : Pour tout complexe z non nul, on a : $\overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} - \frac{1+\bar{z}}{\bar{z}} = \bar{z} - 1$

Proposition 3 : Soit le complexe $n = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ le nombre complexe $n^{25} = n$

Proposition 4 : $\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} - i$

Proposition 5 : $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|\bar{z} + 2i| = \sqrt{2}$ alors $z = \sqrt{2} + 2i$

Exercice 2 : (5pts)

A – 1) déterminer le PGCD (2688 ; 3024)

1) Dans cette question x et y sont deux entiers relatifs.

a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

$$(1) \ 2688x + 3024y = -3360 \quad (2) : 8x + 9y = -10 .$$

b) Vérifier que (1 ; -2) est une solution particulière de l'équation (2).

c) Dédire de ce qui précède les solutions de (2).

Problème (10pts)

A) soit un z un nombre complexe tel que : $AZ = B$ avec $A = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $B = -5(1+i\sqrt{3})$

1) Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$

3) Calculer $(Z)^{2025}$.

B) Soit le nombre $A = 5^{136} + 3x53^{10}$

1) Quel est le reste de la division de 5^{136} par 7 ?

2) Déterminer x pour que A soit divisible par 7 ?

3) Déterminer x et y pour que le nombre $N = \overline{x4y^{12}}$ soit divisible par 11 et par 3

4) Vérifier que les nombres ainsi obtenus sont tous divisibles par 33.

C) Un officier de l'armée malienne décide de compter ses soldats. Il leur ordonne de se mettre en lots de 16, il reste 3 soldats de côté. Il leur ordonne à nouveau de se mettre en lots de 25 et cette fois-ci, il reste 5 soldats de côté. Sachant que le bataillon est constitué de moins de 400 soldats, déterminer le nombre de soldats que possède cet officier.