

COMPOSITION : 1^{ère} PERIODE

<u>Série : TSE</u>	<u>Epreuve de : Mathématiques</u>	<u>2024-2025</u>	<u>Durée : 4 heures</u>	<u>Coef. : 5</u>
--------------------	-----------------------------------	------------------	-------------------------	------------------

Exercice 1 : -----[5 points]

A. On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 2(1 - 2i)z^3 - 2(2 + 3i)z^2 - 4z + 24 - 8i$$

1. Montre que $z_0 = -1 + i$ est une racine de $P(z)$. **(0,5pt)**
2. Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1 que l'on précisera. **(0,5pt)**
3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **(0,5pt)**
4. On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $2 ; 2 - 2i ; -1 - 3i ; -1 + i$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
 - a. Détermine la nature, le périmètre et l'aire du quadrilatère ABCD. **(0,75pt)**
 - b. Démontre que les points A, B, C et D sont sur un même cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon. **(0,75pt)**
 - c. Démontre que le point $E(1; 1)$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$. **(0,25pt)**
5. À tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe $z \neq 2 - 2i$, on associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'affixe :

$$z' = \frac{2z - 4}{z - 2 + 2i}$$

- a) Détermine l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur. **(0,75pt)**
- b) Démontre que $AM' = \frac{4}{BM}$ puis déduis-en l'ensemble des points M' lorsque M parcourt le cercle de centre B et de rayon 16. **(0,5pt)**

B. Soit Z un nombre complexe tel que $Z + \frac{1}{Z} = 2 \cos \theta$ et $Z - \frac{1}{Z} = 2i \sin \theta$.

Démontre que pour tout entier naturel $n ; Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2 \cos(n\theta)$ et $Z^n - \frac{1}{Z^n} = 2i \sin(n\theta)$. **(0,5pt)**

Exercice 2 : -----[4 points]

A. Soit f la fonction de $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2} \tan(2x)$.

1. Dresse le tableau de variation de f puis démontre que f admet une fonction réciproque f^{-1} . **(0,75pt)**
2. Exprime $f'(x)$ en fonction de $f(x)$. **(0,25pt)**
3. Détermine l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et détermine sa fonction dérivée. **(0,5pt)**

- B. 1. a) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 3^n par 5. **(0,5pt)**
- b) Déduis-en le reste de la division euclidienne 3^{2025} puis de 83^{83} par 5. **(0,5pt)**
2. On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.
- On pose $S = x + y$ et $P = xy$.
- a) Démontre que $PGCD(x + y ; x) = 1$ et $PGCD(x + y ; y) = 1$. Déduis-en que S et P sont premiers entre eux. **(0,75pt)**
- b) On admet que S et P sont de parités différentes.
- Détermine les nombres premiers entre eux x et y tels que $SP = 84$. **(0,5pt)**
- c) Déduis-en les deux entiers naturels a et b tels que $\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$ avec $d = PGCD(a; b)$ et $a > b$. **(0,25pt)**

Problème : -----[11 points]

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = |x + 3| - \frac{4}{(x+1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1 + x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ et on désigne par } (\mathcal{C}_f) \text{ sa courbe représentative dans le plan}$$

muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

- Justifie que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **(0,5pt)**
- Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue pour $x \leq 0$. **(0,5pt)**
- Etudie la continuité de f en -3 et en 0 . **(0,5pt)**
- Etudie la dérivabilité de f en -3 et en 0 puis donne une interprétation graphique des résultats obtenus. **(1pt)**
- Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et déduis-en une équation de l'asymptote à $(\mathcal{C}_f)$, parallèle à l'axe des ordonnées. **(1pt)**
 - Montre que la droite (D) d'équation $y = -x - 3$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$. **(0,25pt)**
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement le résultat. **(0,5pt)**

Partie B

On considère la fonction g définie sur $D =]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$

1. Étudie les variations de g sur D . (1pt)
2. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,78 < \alpha < 0,79$. (0,5pt)
3. Déduis-en le signe de $g(x)$ sur D . (0,25pt)
4. Démontre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{1}{\alpha}$ et que $-1,13 < f(\alpha) < -1,10$. (0,5pt)

Partie C

1. Montre que
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{(1-x)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3} \text{ pour } x \in]-\infty; -3[\\ f'(x) = \frac{(x+3)(x^2+3)}{(x+1)^3} \text{ pour } x \in]-3; -1[\cup]-1; 0[\\ f'(x) = \frac{-x g(x)}{\sqrt{1+x^2}} \text{ pour } x \in]0; +\infty[\end{cases} \quad (1pt)$$
2. Étudie le signe de $f'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f . (1pt)
3. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]-3; -1[$.
 - a) Montre que h est une bijection de $]-3; -1[$ vers un intervalle J que l'on précisera. (0,25pt)
 - b) Démontre que pour tout $x \in \left[-2; -\frac{3}{2}\right]$; $-63 \leq h'(x) \leq -7$ et déduis-en que $-63x - 129 \leq h(x) \leq -7x - 17$. (0,5pt)
 - c) Démontre que pour tout $x \in \left[-2; -\frac{3}{2}\right]$; $|h'(x)| \leq 63$ et déduis-en que $|h(x) + 3| \leq 63|x + 2|$. (0,5pt)
 - d) Calcule $h(-2)$ puis détermine l'équation de la tangente à la courbe (C') de h^{-1} au point d'abscisse -3 . (0,5pt)
4. Trace la courbe ~~(C)~~ puis déduis-en la courbe (C') de h^{-1} . (0,75pt)