

COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE		
Epreuve de : Mathématiques	Durée : 04HEURES	Coefficient : 05
Série : TSE	Date :13/ 01/ 2025	COMITE MATHS

NB : Dans ce sujet, les parties I et II au niveau de chaque exercice ainsi que le problème sont indépendantes.

Exercice 1 :(6points).

- I.** On considère le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on pose $u = 1 + j$.
- Etablis que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.
 - a) Démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$u^{2n+1} = -j^{n+2}.$$
 b) Pour tout entier naturel n , exprimer u^{2n} en fonction de n et j .
 c) Calcule, en donnant les résultats sous forme cartésienne, u^{24} et u^{31} .
- II.** Soit $\alpha \in]-\pi, \pi]$ et a le nombre complexe défini par $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
- Calcule le module et un argument de $\frac{1-a}{1+a}$.
 - En déduis le module et un argument de z tel que $a = \frac{2+iz}{2-iz}$.
 - Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $(2 + iz)^6 = (2 - iz)^6$.

Exercice 2 :(6points).

- I.** Détermine tous les entiers naturels x et y tels que $x^2 - y^2 = 11$.
- II.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note $\delta(n)$ la somme des diviseurs positifs de n .
- Exemple :** $D_{10}^+ = \{1; 2; 5; 10\}$ et $\delta(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$.
- Calcule $\delta(1)$, $\delta(4)$, $\delta(45)$ et $\delta(320)$.
 - Soit p un nombre premier, Calcule $\delta(p)$.
 - Soit p un nombre premier et α un entier naturel non nul, montre que :

$$\delta(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}.$$
 - Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(m, n) = 1$, montre que :

$$\delta(m \times n) = \delta(m) \times \delta(n).$$
 - Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note sa décomposition en produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$
 où $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sont des entiers naturels non nuls.
 Exprime $\delta(n)$ en fonction de $p_1, p_2, \dots, p_r$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

Problème :(8points).

- I. 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (2r\cos\theta)z + r^2 = 0$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel quelconque.
- 2) Soit z_1 et z_2 les solutions de cette équation ; écris z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
- 3) Calcule z_1^n et z_2^n pour tout entier naturel n puis p_n défini par $p_n = z_1^n + z_2^n$.
- 4) Application : $r = \frac{1}{2}$; $\theta = \frac{2\pi}{3}$; écris une relation entre p_n et p_{n+1} .
- II. Soit l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z+\bar{z}-i}{z-i\bar{z}}$.
- Détermine l'ensemble de définition E de f . On désigne par M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.
 - Détermine l'antécédent de i .
 - On pose $z = x + iy$.
 - Détermine les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de x et y .
 - Détermine et représente l'ensemble des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pure.
 - Montre que le module de $f(z)$ est égal à $\sqrt{2}$ si et seulement si $4y^2 - 8xy - 1 = 0$.
 - Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $4y^2 - 8xy - 1 = 0$, en considérant y comme inconnue et x comme un paramètre.

BONNE CHANCE !