



Lycée Privé MAMA THIAM

Composition de la 1^{ère} Période : 2024-2025

Epreuve de Mathématiques

Série : TSE Durée : 4 heures

Exercice 1 :

I/-Les divisions euclidiennes de 7937 et 985 par un entier naturel b donnent comme restes respectifs 56 et 97. Détermine l'entier b .

II/- Un étranger A revient dans votre famille tous les 24 jours et un autre B y revient tous les 18 jours.

Le jour du baptême de votre fils Mamadou, les deux étrangers étaient présents chez vous.

- A partir de ce jour, combien de jours s'écouleront pour que l'étranger A et l'étranger B se retrouvent pour la première fois chez vous ?
Précise alors le nombre de retours de A et celui de B chez vous à cette date.
- En déduis le nombre de jours à observer pour qu'ils se retrouvent chez vous pour la cinquième fois.
A cette date, combien de retours chez vous auront fait les étrangers A et B ?

III/-Soit le nombre $P = n^2 - 240$ où n est un entier naturel

- Trouve les diviseurs positifs de l'entier 240
- Trouve l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ soit un carré parfait.

Exercice 2 :

A/-Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, soit les points A, I et B d'affixes respectives 1, 2 et 3. Soit P' le plan P privé de I et f l'application de P' dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = \frac{1}{z-2} + 2$

1) Déterminer les points M de P' vérifiant $f(M) = M$.

2) Calculer en fonction de z , les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IM}$, et $\overrightarrow{IM'}$. En déduire une relation entre IM et IM' . Puis une relation entre les angles $(\vec{e}_1, \overrightarrow{IM})$ et $(\vec{e}_1, \overrightarrow{IM'})$. Placer le point M_0 d'affixe $z_0 = 2 + 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ dans le repère puis le point M_0' en utilisant ce qui précède.

3) On suppose que M est un point de P' distinct de A et de B . Calculer

$z' - 1$ et $z' - 3$ en fonction de z . Vérifie que $\frac{1-z'}{3-z'} = -\frac{1-z}{3-z}$. En déduire une relation entre $\frac{M'A}{M'B}$ et $\frac{MA}{MB}$, puis une relation entre les angles $(\widehat{M'B}, \widehat{M'A})$ et $(\widehat{MB}, \widehat{MA})$

Démontrer que si M appartient à la médiatrice de AB , il en est de même pour M' .

B/- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit I le point d'affixe 1. On note (C) le cercle de diamètre $[OI]$ et on note Ω son centre.

I/ On pose $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

1) Montrer que A_0 appartient au cercle (C) .

2) Soit B le point d'affixe $b = -1 + 2i$ et B' le point d'affixe b' avec $b' = a_0 \times b$.

a. Calculer b' .

b. Montrer que le triangle $OB B'$ est rectangle en B' .

II/ Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe. A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = a \times z$

1) Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$.

2) Montrer que $(\widehat{M'O}, \widehat{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Problème :

A/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1°) Etudier la fonction f ;

2°) Etudier la position relative de C_f par rapport à son asymptote oblique (D) .

3°) a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[4; +\infty[$ [notée g est une bijection de $[4; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f(5); f(6); (f^{-1})'(\frac{15}{2})$.

4°) Montrer que C_f admet un centre de symétrie que l'on précisera.

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β .

6°) a) Montrer que $\forall x \in [4; 5]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

b) En déduire que : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$.

7°) Tracer les courbes C_f de f et $C_{g^{-1}}$ de g^{-1} .

B/I.- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2(x + 2)$

1. Etudie les variations de g sur $[0; +\infty[$.
2. Démontre que l'équation $g(x) = 4$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déduis –en la résolution de l'inéquation $g(x) > 4$.

II- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudie la parité de f .
2. Détermine : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis en déduis $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Donne une interprétation graphique de ces résultats
3. Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$, déduis- en l'équation d'une droite asymptote à (C_f) en $-\infty$.
4. a. Démontre que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et que $f'(x) = \frac{\sqrt{g(x^2)-2}}{x^2\sqrt{x^2+2}}$.
 b. Déduis de la partie I/ que $f'(x) > 0$ sur $] \sqrt{a}; +\infty[$.
 c. Déduis –en les variations de f sur $[0; +\infty[$ puis sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = \sqrt{2}$.
6. Construis la courbe (C_f) .