

Composition du premier trimestre 2024-2025

Exercice 1

I. Soit f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = 2iz + 4 - 3i$.

1) a) Justifie que f est une similitude directe et précise ses éléments caractéristiques.

b) Détermine l'expression analytique de f .

2) Détermine une équation de l'image par f de la droite (AB) ; A et B étant les points d'affixes respectives $-1 + i$ et $2 - 5i$.

3) Montre que B est l'image de A par f .

3) Détermine une équation du cercle C' image du cercle C passant par les points $AB\Omega$ (où Ω est le point invariant par f)

II. Soit $P(z) = z^3 - (i + 2 \cos \alpha)z^2 + (1 + 2i \cos \alpha)z - i$.

1) Calcule $P(i)$.

2) En déduis une factorisation de $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.

3) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2

I. Dans un système de numération de base x , on considère les nombres : $A = 121$; $B = 222$ et $C = 100122$.

1) Explique pourquoi x doit être strictement supérieur à 2.

2) a) Sachant que $C = A \times B$; montre que : $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 7x - 4 = 0$. En déduis que x divise 4

b) Détermine alors x .

3) Dans cette question, on suppose que $x = 4$.

a) Ecris A , B et C dans le système décimal

b) Montre alors que : $C = A \times B = PPCM(A; B)$.

En déduis que l'équation $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

4) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $25x - 42y = 1$

Vérifie que $(-5; -3)$ est une solution de l'équation. Résous cette équation.

II.

1. Montre que $\ll + \gg$ et la $\ll \times \gg$ sont des lois de composition interne dans $\mathbb{Z}$.

2. Monte que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif.

3. Quand dit-on que le triplet $(G, *, \perp)$ est anneau ?

Problème

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 6x + 2$.

- 1) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,01.
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+2}$. Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Détermine le domaine de définition de f . Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df .

2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$. En déduis les variations de f .

3) a) Détermine les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2}$

b) En déduis que Cf admet une asymptote oblique (Δ) et étudie la position de Cf par rapport à (Δ) .

Vérifie en particulier que Cf rencontre (Δ) en un point unique A .

5) Détermine les abscisses des points B et B' de Cf admettant une tangente parallèle à (Δ) .

6) Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$. En déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.

7) Trace Cf et (Δ) .