

Composition de la 1 ^{ère} Période 2024-2025		
Epreuve de : Mathématiques		
Lycée : La « SOURCE »	Classe : TSE	Durée : 4 H

Exercice1.....6pts

A. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ l'unité graphique est 2 cm.

On donne les points A,B et C d'affixes respectives : $a = 2 - 2i ; b = 2 + 2i ; c = -2 + 2i$

- 1- Place les points A,B et C dans le plan complexe
- 2- Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.
- 3- Ecris sous forme exponentielle a,b et c
- 4- Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$ et (Δ) le cercle de centre ω d'affixe 2 et de rayon 2.
 - a- Montre que l'expression complexe de r s'écrit : $z' = i \cdot z$
 - b- Détermine l'image de B par r
 - c- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (Δ') image de (Δ) par r.
 - d- Construis (Δ) et (Δ') sur la même figure.
- 5- Soit α un nombre réel $(0 < \alpha < 2\pi ; \alpha \neq \pi)$. On note M le point d'affixe z telle que : $z = 2 + 2i \cdot e^{i\alpha}$ et M' l'image de M par r. On note z' l'affixe de M'
 - a- Démontre que M appartient à (Δ) puis détermine l'affixe z' du point M'.
 - b- Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} + 1 = 2 \cos(\frac{x}{2}) \cdot e^{i\frac{x}{2}}$ et $e^{ix} - 1 = 2i \sin(\frac{x}{2}) \cdot e^{i\frac{x}{2}}$
 - c- Prouve que : $\frac{z-b}{z'-b} = \tan \frac{\alpha}{2}$. Que peut-on dire sur les points M,M'et B ?
- 6- On donne $\alpha = \frac{\pi}{3}$
Détermine sous forme algébrique M et M'puis place-les sur le repère.
- B. Résous dans C, l'équation : $z^2 - 2^{\alpha+1} \cos \alpha z + 2^{2\alpha} = 0$

Exercice 2.....5pts

- I. Soit l'équation $(E) : 45x - 16y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs
 - 1- Montre que $45 \wedge 16 = 1$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.
 - 2- Démontre que le couple $(10 ; 28)$ est une solution particulière de (E)
 - 3- Résous dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E)
 - 4- Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.

Le navire A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours. Le navire A accoste le jour Jo au port et quatre jours plus tard B accoste au port à son tour. On note J1 le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

Soient u et v le nombre d'entrées au port effectuées respectivement par A et B entre Jo et J1.

- a- Démontre que le couple (u, v) est une solution de (E)
- b- Calcule le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).
- II. On considère l'entier naturel $A = \overline{1x416}^7$
 - a- Détermine x pour que A soit divisible par 5
 - b- Pour $x = 0$, écrit A dans le système décimale puis détermine le nombre de diviseurs positifs de A .

Problème : 9pts

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} & \text{si } x \in]-\infty; 2[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} & \text{si } x \in [2; +\infty[\end{cases}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie A :

- 1- Montre que l'ensemble de définition D_f de f est : $] - \infty; -1[\cup] - 1; +\infty[$
- 2- Calcule les limites aux bornes de D_f puis interprète le résultat de la limite en -1 .
- 3- Trouve l'équation de l'asymptote oblique (D) à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
- 4- a- Détermine les réels a, b et c tels que : $\forall x \in] - \infty; 2[, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
 b- Montre que (C) admet une autre asymptote (Δ) au voisinage de $-\infty$
 c- Etudie la position de (C) par rapport à (Δ) .
- 5- Etudie la dérivabilité de f en 2. Interprète géométriquement ce résultat.

Partie B

- 1- a- Etudie les variations de f sur $] - \infty; -1[\cup] - 1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$
 b- Dresse le tableau de variation de f
- 2- Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle.
- 3- Détermine les coordonnées des points d'intersections de (C) avec l'axe des abscisses
- 4- Trace (T) ; les asymptotes et (C) dans le repère.
- 5- Soit g la restriction de f à l'intervalle $] - \infty; -1[$
 - a- Démontre que g est une bijection de $] - \infty; -1[$ vers un intervalle J à préciser.
 - b- Calcule $g(-3)$ et $g'(\frac{-5}{2})$
 - c- La bijection réciproque g^{-1} de g est-elle dérivable en $\frac{-5}{2}$? si oui, calcule $(g^{-1})'(\frac{-5}{2})$.
 - d- Construis la courbe (C') de g^{-1} .

Bonne inspiration !!!