

GROUPE SCOLAIRE CLAIRE FONTAINE Année scolaire : 2024-2025	Composition de la 2^e Période Epreuve de MATHÉMATIQUES	Classe : TSE Coeff : 4 Durée : 3 heures
---	---	--

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. (Vérifier que vous avez toutes les parties du sujet). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (6 points)

A-1) Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de Vrai si la proposition est vraie ou de Faux si la proposition est fausse. **(1 pt)**

N°	Propositions
1	Soient A et B deux points distincts du plan. La composée $r_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overline{AB}}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$
2	Toute isométrie du plan qui laisse invariant deux points distincts A et B est la réflexion d'axe (AB)

2) Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie. Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie. **(1 pt)**

N°	Enoncé		Affirmations
1	Toute application affine f telle que $f \circ f = f$ est	A	Une symétrie glissée
		B	Une homothétie
		C	Une symétrie affine
		D	Une projection
2	Une application affine g a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$; g a pour ensemble des points invariants :	A	L'ensemble vide
		B	Le point $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
		C	La droite $(D): x + y - 1 = 0$
		D	Le point $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

B- L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $AB = 3$.

On note E le milieu du segment $[BC]$ et G le barycentre des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$ et $(D, -1)$.

1)a) Démontrer que A est le milieu du segment $[OG]$. **(0,5 pt)**

b) Calculer GB^2 . **(0,5 pt)**

c) Montrer que $GB = GD$. **(0,5 pt)**

d) Déterminer et construire l'ensemble des points (Γ) des points M du plan tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9. \text{ (0,75 pt)}$$

2)a) Justifier que $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. **(0,5)**

b) Démontrer que pour tout point M du plan : $3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE}$. **(0,5)**

c) Déterminer et construire l'ensemble des points (E) des points M du plan tels que :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63. \text{ (0,75 pt)}$$

Exercice 2 (4 points)

On se propose d'étudier la suite (U_n) de nombres réels, définie par $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout entier naturel n non nul, $U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) U_n$.

1) Démontrer que pour tout réel t strictement positif on a : $t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$. **(1) (0,75 pt)**

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

2) En utilisant le résultat **(1)**, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$. **(0,25 pt)**

3) Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante. **(0,5 pt)**

4) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(U_n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$. **(0,5 pt)**

5) On pose $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n}$ et $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \dots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a) A l'aide des questions **2)** et **4)**, démontrer que $a_n - \frac{1}{2}b_n < \ln(U_n) < a_n$. **(0,5 pt)**

b) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$. **(0,25 pt)**

c) Démontrer que la suite (U_n) est majorée. En déduire sa convergence. **(0,5 pt)**

d) On note l , la limite de la suite (U_n) . Démontrer que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln l \leq \frac{1}{e-1}$. Puis en déduire une valeur approchée de l à 0,1 près. **(0,75 pt)**

Problème (10 points)

$\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A (1,25 pt)

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2 \ln x$.

1) Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite de 0. **(0,5 pt)**

2) Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$. **(0,25 pt)**

3) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$. **(0,25 pt)**

4) En déduire le signe de h sur $]0; +\infty[$. **(0,25 pt)**

Partie B (2 pts)

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + \ln x$.

1) Calculer les limites aux bornes de D_g . **(0,5 pt)**

2) On note g' la fonction dérivée de g . Exprimer g' en fonction de h . **(0,25 pt)**

3) Démontrer que $g(\alpha) > 0$. **(0,25 pt)**

4) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans l'intervalle $]0 ; 1[$. **(0,25 pt)**

b) On admet que $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans l'intervalle $]\alpha ; +\infty[$. Déterminer le signe de g . **(0,25 pt)**

c) Vérifier que $x_1 \in]0,3 ; 0,4[$ et $x_2 \in]3,3 ; 3,4[$. **(0,5 pt)**

Partie C (4 pts)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{1+x^2} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **(0,75 pt)**

2) Calculer la limite de f en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat. **(0,5 pt)**

3) On note f' la fonction dérivée de f . Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$. **(0,25 pt)**

4) Dresser le tableau de variation de f . **(0,5 pt)**

5) Démontrer que si β est solution de l'équation $g(x) = 0$ alors $\ln \beta = \frac{\beta^2+1}{\beta^2-1}$. **(0,25 pt)**

6) En déduire que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$. **(0,5 pt)**

7) Vérifier que $f(1) = 0$, puis en déduire le signe de $f(x)$. **(0,5 pt)**

8) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. Unités graphiques : 3 cm en abscisse et 8 cm en ordonnée. On prendra $x_1 = 0,35$; $x_2 = 3,35$. **(0,75 pt)**

Partie D (2,75 pts)

On considère la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

1) Calcul de la limite de F en $+\infty$.

a) Démontrer que $\forall t \in]1 ; +\infty[, \frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. **(0,25 pt)**

b) Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$. **(0,25 pt)**

c) En déduire les limites de $F(x)$ et de $\frac{F(x)}{x}$ en $+\infty$. **(0,5 pt)**

2) Calcul de la limite de F en 0.

Pour tout nombre réel $\alpha \in]0 ; 1[$, on pose $\varphi(\alpha) = \int_1^\alpha t \ln t dt$.

a) Exprimer $\varphi(\alpha)$ en fonction de α . **(0,25 pt)**

b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(\alpha)$. **(0,25 pt)**

c) En déduire un encadrement de $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(x)$. **(0,25 pt)**

4) a) Déterminer la fonction dérivée F' de F . **(0,25 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de F . **(0,25 pt)**

c) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans le même repère que (C_f) . **(0,5 pt)**