

COMPOSITIONS : 2^{ème} PERIODE
ANNEE SCOLAIRE 2024 – 2025
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

SERIE : T.S.E
COEFF : 4

DUREE : 4 HEURES
NOMBRE DE PAGE : 3

Contexte : La société NIANGADO & Fils

La société NIANGADO & Fils possède une usine de fabrication des stylos. Une étude statistique à montrer que 90% de la production ne présente pas de défaut. Avant la vente, chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 94% des stylos avec défaut et accepte 92% des stylos sans défaut.

Le directeur de la société est un professeur retraité de mathématiques. Boubacar, un fils du directeur est élève en classe de terminale TSE, en visite dans l'usine, s'intéresse à ces informations sur le contrôle d'un stylo. Il observe aussi une affiche publicitaire décorée de façon impressionnante dans l'usine. Sur l'affiche, se trouvent des lignes ayant l'allure de la courbe représentative d'une fonction numérique à variable réelle et N modèles de stylos. Ainsi, Boubacar se rapproche de son père pour connaître la fonction dont l'allure est sur l'affiche afin de l'étudier. Mais il s'intéresse surtout au chiffre d'affaire annuel de l'usine.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Boubacar en résolvant les problèmes suivants :

Problème 1 : (4 points)

- 1) On choisit au hasard un stylo avant son passage au contrôle et on désigne par A l'évènement « le stylo est accepté à l'issue du contrôle ».
 - a) Calcule les probabilités des évènements suivants :
 E_1 : « le stylo est accepté et n'a pas de défaut » (0,75pt)
 E_2 : « le stylo est accepté et a un défaut » (0,75pt)
 - b) Calcule la probabilité de l'évènement A . (0,5pt)
 - c) Le stylo est accepté à l'issue du contrôle. Quelle est la probabilité qu'il présente un défaut ? (0,5pt)
- 2) On contrôle successivement et au hasard 5 stylos de façons indépendantes.
 - a) Quelle est la probabilité que 2 exactement des stylos soient acceptés ? (0,75pt)
 - b) Quelle est la probabilité qu'un au moins des stylos soit accepté ? (0,75pt)

Problème 2 : (5 points)

Le chiffre d'affaire annuel de l'usine est $M = \left(\frac{12}{\pi} \times I\right)$ milliards de francs CFA, tels que :

$$I = \int_a^b h(x) dx \quad \text{où } a = -\ln(1 + \sqrt{3}), \quad b = -\ln(\sqrt{3} - 1) \quad \text{et } h \text{ la fonction définie par : } h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x}}}.$$

- 3) Justifie l'existence du nombre réel I . (0,5pt)
- 4) Soit l'application v définie de $K = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ dans $\left]-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$ par : $v(x) = \ln(\cos x + \sin x)$
 - a) Montre que : $v\left(\frac{\pi}{3}\right) = b$ et $v\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a$. (1pt)

b) Justifie que : $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. (0,5pt)

c) Démontre que v est une bijective. Soit v^{-1} la réciproque de v . (1pt)

5) a) Justifie que $\forall x \in E, (v^{-1})'(x) = -h(x)$. Calcule alors l'intégrale I . (1,5pts)

b) Détermine le chiffre d'affaire annuel de l'usine. (0,5pt)

Problème 3 : (11 points)

Le père l'informe que la fonction dont la courbe est sur l'affiche est la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

définie par :
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{2x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 et le nombre de modèles de stylos N est la partie

entière de $\left(16 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n\right)$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

A) Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par : $g(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$

6) a) Etudie les variations de g . (1pt)

b) Déduis-en le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; 0[$. (0,25pt)

B)

7) Justifie que l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}$. (0,25pt)

8) a) Etudie la continuité de f en 0. (0,5pt)

b) Sachant que le développement limité d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de

0 est : $-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ c'est-à-dire $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec

$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation

géométriquement le résultat. (1pt)

9) a) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,75pt)

b) Etudie les branches infinies de (C) . (0,25pt)

10) a) Démontre que pour tout x élément de $] -\infty; 0[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2(1-x)}$ puis déduis-en le signe

de $f'(x)$ sur $] -\infty; 0[$. (0,5pt)

b) Pour tout élément x de $]0; +\infty[$. Calcule $f'(x)$ puis donne son signe. (0,5pt)

c) Dresse le tableau de variation de f sur D . (0,5pt)

11) Trace la courbe (C) . (1pt)

C) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$

12) a) Etudie le sens de variation de h . (0,5pt)

b) Calcule $h(0)$ et la limite en $+\infty$ de h . (0,5pt)

c) Déduis-en que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$ et que :

$$\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$$
. (0,5pt)

13) Posons : $I = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

- a) Démontre que $\forall x \in I, f(x) \in I$. (0,25pt)
- b) Calcule $f''(x)$ pour tout x élément de $[0; +\infty[$ puis déduis-en le sens de variation de f' sur I . (0,5pt)
- c) Démontre que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$. (0,25pt)
- d) Démontre que : $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$. (0,5pt)

14) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombre réels définie par $U_0 = \frac{1}{4}$ et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = f(U_n).$$

- a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$. (0,25pt)
- b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$. (0,25pt)
- c) Déduis-en que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$. (0,5pt)
- d) Montre que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0,25pt)
- e) Détermine le nombre de modèles de stylos sur l'affiche publicitaire. (0,25pt)

-/-